Concours Commun INP 2025 – Mathématiques 1 (Filières MP/MPI)

EXERCICE I

Q1.

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1. Justifions que $f'(]-1,1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

Puisque f est C^1, sa dérivée $f' :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ existe et est **continue** sur $]-1,1[$. L'intervalle $]-1,1[$ est connexe par arcs (tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'est). L'image d'un connexe par arcs par une application continue étant connexe par arcs, on en déduit que $f'(]-1,1[)$ est connexe par arcs.

$$\boxed{f'(]-1,1[) \text{ est connexe par arcs}}.$$

Q2.

On considère $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \left(t^2 \sin \frac{1}{t},\, t^2 \cos \frac{1}{t}\right), & t \in]-1,1[\setminus \{0\}, \\ (0,0), & t = 0. \end{cases}$$

Q2.a)

Montrons que f est dérivable en 0. Pour $t \neq 0$,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \left(t \sin \frac{1}{t},\, t \cos \frac{1}{t}\right).$$

Or $|t \sin(1/t)| \leq |t|$ et $|t \cos(1/t)| \leq |t|$, donc par encadrement

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = (0,0).$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = (0,0)}$.

Pour $t \neq 0$, les composantes de f sont dérivables sur $]-1,1[\setminus \{0\}$ comme composées de fonctions C^1. Pour tout $t \in]-1,1[\setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= 2t \sin \frac{1}{t} + t^2 \left(-\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t}\right) = 2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, \\ f_2'(t) &= 2t \cos \frac{1}{t} + t^2 \left(\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t}\right) = 2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f'(t) = \begin{cases} \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t},\, 2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}\right), & t \in]-1,1[\setminus \{0\}, \\ (0,0), & t = 0. \end{cases}}$$

Q2.b)

Pour $t \neq 0$, calculons $\|f'(t)\|_2^2$:

$$\begin{aligned}
\|f'(t)\|_2^2 &= \Big(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\Big)^2 + \Big(2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\Big)^2 \\
&= 4t^2\sin^2\frac{1}{t} - 4t\sin\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} + \cos^2\frac{1}{t} \\
&\qquad + 4t^2\cos^2\frac{1}{t} + 4t\cos\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t} + \sin^2\frac{1}{t} \\
&= 4t^2\big(\sin^2\frac{1}{t} + \cos^2\frac{1}{t}\big) + \big(\cos^2\frac{1}{t} + \sin^2\frac{1}{t}\big) \\
&= 4t^2 + 1.
\end{aligned}$$

Donc $\|f'(t)\|_2 = \sqrt{4t^2+1} \geq 1$ pour tout $t \neq 0$, tandis que $\|f'(0)\|_2 = 0$.

Ainsi l'ensemble $f'(]-1,1[)$ est contenu dans la réunion

$$f'(]-1,1[) \subset \{0\} \cup \big\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_2 \geq 1\big\}.$$

Aucun point de $f'(]-1,1[)$ n'a une norme strictement comprise entre 0 et 1.

Montrons par l'absurde que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs. Supposons qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to f'(]-1,1[)$ reliant $f'(0) = (0,0)$ à $f'(t_0)$ pour un $t_0 \neq 0$. La fonction $N : [0,1] \to \mathbb{R}$, $N(s) = \|\gamma(s)\|_2$, est continue sur $[0,1]$ comme composée d'applications continues. On a $N(0) = 0$ et $N(1) = \sqrt{4t_0^2+1} \geq 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s \in]0,1[$ tel que $N(s) = \frac{1}{2}$. Mais alors $\gamma(s)$ serait un point de $f'(]-1,1[)$ de norme $\frac{1}{2}$, ce qui est impossible car tout point non nul de $f'(]-1,1[)$ a une norme au moins 1. Contradiction. Donc $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.

$$\boxed{f'(]-1,1[) \text{ n'est pas connexe par arcs}}.$$

(Un dessin de la boule unité pour $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire le carré $[-1,1]^2$, montre que $f'(]-1,1[)$ est constitué de l'origine et de points situés à l'extérieur du disque unité ouvert, ce qui creuse un “trou” de normes inaccessible.)

EXERCICE II

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (2 - x - y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - 2x - y)^2.$$

Q3. Première méthode

f est une fonction polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Calculons ses dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - x) - 2 \cdot 2\,(1 - 2x - y) \\
&= -4 + 2x + 2y - 2 + 2x - 4 + 8x + 4y \\
&= (12x + 6y - 10), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - 2x - y) \\
&= -4 + 2x + 2y - 2 + 4x + 2y \\
&= (6x + 4y - 6).
\end{aligned}$$

Un point critique vérifie $\nabla f(x, y) = 0$, soit

$$\begin{cases} 12x + 6y - 10 = 0, \\ 6x + 4y - 6 = 0. \end{cases}$$

Résolvons : de la deuxième équation, $6x = 6 - 4y$ soit $x = 1 - \frac{2}{3}y$. En reportant dans la première : $12(1 - \frac{2}{3}y) + 6y - 10 = 12 - 8y + 6y - 10 = 2 - 2y = 0$, donc $y = 1$ puis $x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Le seul point critique est

$$\boxed{\left(\tfrac{1}{3}, 1\right)}.$$

La matrice hessienne de f est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont les solutions de $\det(H - \lambda I_2) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 12 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (12 - \lambda)(4 - \lambda) - 36 = 48 - 16\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = 256 - 48 = 208 > 0$, les deux valeurs propres sont $\lambda = 8 \pm \sqrt{52} = 8 \pm 2\sqrt{13}$. Elles sont toutes deux strictement positives ($8 - 2\sqrt{13} > 0$ car $\sqrt{13} < 4$). La matrice hessienne est donc définie positive au point critique, ce qui garantit que f admet en $(\frac{1}{3}, 1)$ un minimum local strict. Montrons qu'il est global. f est une somme de trois carrés de formes affines linéairement indépendantes (les gradients $(-1, -1)$, $(-1, 0)$ et $(-2, -1)$ sont libres), donc $f(x, y) \to +\infty$ quand $\|(x, y)\| \to +\infty$ (coercivité). Une fonction continue et coercive sur $\mathbb{R}^2$ atteint son minimum global ; celui-ci ne peut être qu'en l'unique point critique. Ainsi $(\frac{1}{3}, 1)$ est le minimum global de f et

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(2 - \frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3} - 1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\min f(x, y) = \frac{4}{3}}.$$

Q4. Deuxième méthode

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on pose

$$a = (2,1,1), \quad u = (1,1,2), \quad v = (1,0,1), \quad F = \operatorname{vect}\{u,v\}.$$

Soit b le projeté orthogonal de a sur F. Par définition, $a - b \in F^{\perp}$, donc $(a-b)\cdot u = 0$ et $(a-b)\cdot v = 0$. Écrivons $b = \alpha u + \beta v$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions d'orthogonalité donnent :

$$\begin{cases} (a - \alpha u - \beta v)\cdot u = 0, \\ (a - \alpha u - \beta v)\cdot v = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a\cdot u = \alpha \|u\|^2 + \beta (v\cdot u), \\ a\cdot v = \alpha (u\cdot v) + \beta \|v\|^2. \end{cases}$$

Calculons les produits scalaires :

$$\|u\|^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6, \quad \|v\|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2, \quad u\cdot v = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 3,$$

$$a\cdot u = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 5, \quad a\cdot v = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 3.$$

Le système devient

$$\begin{cases} 6\alpha + 3\beta = 5, \\ 3\alpha + 2\beta = 3. \end{cases}$$

Résolvons : de la deuxième équation, $3\alpha = 3 - 2\beta$ soit $\alpha = 1 - \frac{2}{3}\beta$. En reportant dans la première : $6(1 - \frac{2}{3}\beta) + 3\beta = 6 - 4\beta + 3\beta = 6 - \beta = 5$, donc $\beta = 1$ et $\alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ainsi

$$b = \frac{1}{3}u + v = \left(\frac{1}{3} + 1,\ \frac{1}{3} + 0,\ \frac{2}{3} + 1\right) = \left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right).$$

Observons que $f(x,y)$ s'écrit comme le carré de la distance entre a et le point $(x, y, 2x+y)$ (car $1 - 2x - y = 1 - (2x+y)$). En effet,

$$f(x,y) = \|a - (x, y, 2x+y)\|_2^2.$$

L'ensemble $\{(x,y,2x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est exactement $F = \operatorname{vect}\{u,v\}$ (car $u = (1,1,2)$ et $v = (1,0,1)$, et $xu + yv = (x+y,\ x,\ 2x+y)$ donne bien tous les éléments de F par changement de variables $X = x+y$, $Y = x$). Donc

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = d(a,F)^2 = \|a - b\|_2^2,$$

où $d(a,F)$ est la distance de a au sous-espace F.

Calculons $a - b$:

$$a - b = \left(2 - \frac{4}{3},\ 1 - \frac{1}{3},\ 1 - \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right).$$

D'où $\|a-b\|_2^2 = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{3}$. On retrouve

$$\boxed{\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{4}{3}}.$$

PROBLÈME

Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I — Théorème de comparaison avec une intégrale

f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), \qquad J_n = \int_0^n f(t)\,dt,$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$I_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt.$$

Q5.

Étudions la monotonie des suites (S_n) et (J_n).

$S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$, donc (S_n) est croissante. $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq 0$ car $f \geq 0$, donc (J_n) est également croissante.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $t \in [k-1, k]$:

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k-1).$$

En intégrant sur $[k-1, k]$ (l'intégrale conserve l'ordre) :

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dt = f(k-1).$$

Ainsi

$$\boxed{f(k) \leq I_k \leq f(k-1)}.$$

Q6.

Par définition,

$$J_n = \int_0^n f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} I_k.$$

En utilisant l'encadrement de Q5,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} I_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1).$$

Or $\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = S_{n-1}$. Donc

$$\boxed{S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}}.$$

Q7.

Démontrons les deux résultats.

(1) f intégrable sur $\mathbb{R}_+ \iff \sum f(n)$ converge.

D'après Q6, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$. Les suites (S_n) et (J_n) sont croissantes (Q5).

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite (J_n) converge (vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$). Puisque $J_n \leq S_{n-1}$, la suite (S_{n-1}), et donc (S_n), est majorée ; étant croissante, elle converge. Donc $\sum f(n)$ converge.

Réciproquement, si $\sum f(n)$ converge, alors (S_n) converge et est majorée. De $S_n - f(0) \leq J_n$, la suite (J_n) est majorée ; étant croissante, elle converge. Donc $\int_0^{+\infty} f$ converge, i.e. f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(2) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\Big(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\Big)$ converge.

Posons $u_n = I_n - f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$. D'après Q5, $0 \leq u_n \leq f(n-1) - f(n)$. La somme télescopique donne

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n}\big(f(k-1) - f(k)\big) = f(0) - f(n) \leq f(0).$$

Ainsi la série $\sum u_n$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées : elle converge.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\Big) \text{ converge}}.$$

Q8. Un exemple.

Soit $\alpha > 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ pour $x \geq 2$.

Q8.a)

f est C^1 sur $[2, +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{(\ln x)^\alpha + x \cdot \alpha(\ln x)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x}}{x^2(\ln x)^{2\alpha}} = -\dfrac{(\ln x)^{\alpha-1}(\ln x + \alpha)}{x^2(\ln x)^{2\alpha}} \leq 0.$
Donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

Calculons $\int_2^X f(t)\,dt$ par le changement de variable $u = \ln t$, $du = dt/t$:

$$\int_2^X \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{du}{u^\alpha} = \begin{cases} \Big[\dfrac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_{\ln 2}^{\ln X}, & \alpha \neq 1, \\ \Big[\ln u\Big]_{\ln 2}^{\ln X}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Quand $X \to +\infty$:

— Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge vers $\dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$.

— Si $\alpha \leq 1$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge.

D'après Q7.(1), la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge, donc

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \begin{cases} \text{converge}, & \alpha > 1, \\ \text{diverge}, & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}}$$

Q8.b)

Pour $\alpha = 2$, $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. D'après Q6,

$$S_n - f(2) \leq J_n \leq S_{n-1},$$

où $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^2}$ et $J_n = \int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$.

On en déduit

$$S_n \leq J_n + f(2) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}, \qquad S_{n-1} \geq J_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}.$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}.$$

$$\boxed{\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}}.$$

Q9. Une application.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

Q9.a)

Appliquons Q7.(2) à $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ (f est continue, positive, décroissante). Pour $k \geq 1$,

$$I_k = \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = \ln k - \ln(k-1).$$

La série $\sum_{k\geq 1}(I_k - f(k)) = \sum_{k\geq 1}\bigl(\ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k}\bigr)$ converge. Sa somme partielle jusqu'_a n est

$$\sum_{k=1}^n \bigl(\ln k - \ln(k-1) - \tfrac{1}{k}\bigr) = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -T_n.$$

Ainsi (T_n) converge (vers l'opposé de la somme de la série). Notons $\gamma = \lim_{n\to+\infty} T_n$ la constante d'Euler.

$$\boxed{(T_n) \text{ converge vers } \gamma \in \mathbb{R}}.$$

Q9.b)

Par définition, $T_n \to \gamma$, donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad (n \to +\infty)}.$$

On en déduit en particulier l'équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Q10. Une application sur une série de fonctions.

On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ où $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x}$ pour $x > 0$.

Q10.a)

Étudions la convergence normale sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$,

$$|g_n(x)| = \frac{x}{n^2+x} \leq \frac{x}{n^2}.$$

Mais $\sup_{x>0} \frac{x}{n^2+x} = 1$ (atteint quand $n^2 \ll x$), donc $\|g_n\|_\infty = 1$ et $\sum \|g_n\|_\infty$ diverge. La convergence normale sur $]0,+\infty[$ **n'a pas lieu**.

Q10.b)

Soit $x>0$ fixé. Posons $f(t) = \dfrac{x}{t^2+x}$ pour $t \geq 0$. f est C^1, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$ car $f'(t) = -\dfrac{2xt}{(t^2+x)^2} \leq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement de Q5 s'écrit :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n-1).$$

En sommant de $k=1$ à n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Q10.c)

Pour $x>0$ fixé, posons $f(t) = \dfrac{x}{t^2+x}$. f est continue, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$ (car $f'(t) \leq 0$). D'après Q5 appliqué à f, pour tout entier $n \geq 1$:

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n-1).$$

En sommant de $k=n+1$ à $+\infty$, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Calculons $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{x}{t^2+x}\,dt = \sqrt{x}\int_{n/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n}{\sqrt{x}}\Big).$$

On obtient donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n+1}{\sqrt{x}}\Big) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \leq \sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n}{\sqrt{x}}\Big).$$

En particulier, pour $n=1$,

$$\boxed{\sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2}{\sqrt{x}}\Big) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} g_k(x) \leq \sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)}.$$

Q10.d)

Déterminons $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$. On a $g_1(x) = \dfrac{x}{1+x} \to 1$ quand $x \to +\infty$. D'après Q10.c avec $n = 1$,

$$\sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2}{\sqrt{x}}\Big) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} g_k(x) \leq \sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

Or $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{\sqrt{x}} = \arctan\frac{\sqrt{x}}{a} \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$, donc les deux bornes tendent vers $+\infty$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = +\infty}.$$

Étudions la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la série $\sum g_n$. Pour $x > 0$, le reste $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} g_n(x)$ vérifie

$$R_N(x) \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{x}{n^2 + x} \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{x}{(2N)^2 + x} = N \cdot \frac{x}{4N^2 + x}.$$

Pour $x = 2N^2$, $R_N(2N^2) \geq N \cdot \frac{2N^2}{4N^2+2N^2} = \frac{N}{3} \to +\infty$ quand $N \to +\infty$. Donc $\|R_N\|_\infty$ ne tend pas vers 0 et la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La série } \sum g_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]0, +\infty[}.$$

Partie II — Contre-exemples

Q11.

Soit $f(x) = \dfrac{\sin(2\pi x)}{x}$ pour $x \geq 1$.

Q11.a)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$. On remarque que $\sin(2\pi t)$ est 1-périodique et change de signe en $n + \frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt \\
&= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt + \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi(u+\frac{1}{2}))}{u+\frac{1}{2}}\,du \quad (u = t - \tfrac{1}{2}) \\
&= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{t+\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi t)\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\Big)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{t(t+\frac{1}{2})}\,dt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi t)}{t(t+\frac{1}{2})}\,dt}.$$

Q11.b)

Pour $x \geq 1$, soit $p = \lfloor x \rfloor$ la partie entière. Alors

$$\int_1^x \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} f(t)\,dt + \int_p^x f(t)\,dt.$$

Majorons $\left|\int_n^{n+1} f(t)\,dt\right|$ en utilisant Q11.a : Utilisons une intégration par parties. Posons $u(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = \sin(2\pi t)$, d'où $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $v(t) = -\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}$. Alors

$$\int_n^{n+1} \frac{\sin(2\pi t)}{t}\,dt = \Big[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi t}\Big]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi t^2}\,dt.$$

Puisque $\cos(2\pi n) = \cos(2\pi(n+1)) = 1$, le terme tout intégré vaut $\frac{-1}{2\pi}\big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\big) = \frac{1}{2\pi n(n+1)}$. Donc

$$\Big|\int_n^{n+1} f(t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{2\pi n(n+1)} + \int_n^{n+1} \frac{dt}{2\pi t^2} = \frac{1}{2\pi n(n+1)} + \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{\pi n(n+1)}.$$

Ainsi

$$\Big|\int_1^x f(t)\,dt\Big| \leq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{\pi n(n+1)} + \Big|\int_p^x f(t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{p} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{p}.$$

Donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (semi-convergente).

Étudions l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$ au sens absolu. Pour $t \geq 1$, $|\sin(2\pi t)|$ est 1-périodique et $\int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)|\,dt = \frac{2}{\pi}$ (valeur moyenne de $|\sin|$). Donc

$$\int_n^{n+1} \frac{|\sin(2\pi t)|}{t}\,dt \geq \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)|\,dt = \frac{2}{\pi(n+1)}.$$

Par suite $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,dt$ diverge (série harmonique). Ainsi f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ au sens absolu.

Cependant, $\sum_{n\geq 1} f(n) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n)}{n} = 0$ converge trivialement. Ce contre-exemple montre que l'hypothèse de positivité est nécessaire dans Q7.(1) : sans elle, $\sum f(n)$ peut converger sans que f soit intégrable.

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} f(n) \text{ converge mais } f \text{ n'est pas intégrable sur } [1,+\infty[}.$$

Q12.

Construisons une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1,+\infty[$ telle que $\sum f(n)$ diverge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite un triangle isocèle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 centré en n, d'aire $\frac{1}{n^2}$. L'aire d'un triangle de base $2a_n$ et hauteur 1 est a_n. On impose donc $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n^2}}.$$

Définissons f sur $[1,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-n|}{a_n}, & x \in [n-a_n, n+a_n],\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est continue, positive, et pour tout n, $f(n) = 1$. L'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ est la somme des aires des triangles (les supports sont disjoints car $a_n = \frac{1}{n^2}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ ne se chevauchent pas pour $n \geq 1$) :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Cependant,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

diverge grossièrement. Ce contre-exemple montre que le théorème de comparaison (Q7.(1)) n'est plus valable si l'on supprime l'hypothèse de décroissance : f est positive et intégrable mais $\sum f(n)$ diverge.

$$\boxed{f \text{ continue, positive, intégrable sur } [1,+\infty[\text{, mais } \sum_{n\geq 1} f(n) = +\infty}.$$