

Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2025
Mathématiques 2 (Filière MP)

EXERCICE 1

Q1.

Écrire une fonction `degreMax(d: dict) -> int` qui prend en argument un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré (nombre de successeurs) maximal.

```
%%  
%% This is file 'rename-to-empty-base.tex',  
%% generated with the docstrip utility.  
%%  
%% The original source files were:
```

```
def degreMax(d: dict) -> int:  
    if not d:  
        return 0  
    return max(len(voisins) for voisins in d.values())
```

Q2.

Écrire une fonction `grapheInverse(d: dict) -> dict` qui renvoie le graphe inverse (chaque arc (u, v) devient (v, u)).

```
def grapheInverse(d: dict) -> dict:  
    inv = {s: [] for s in d}  
    for u in d:  
        for v in d[u]:  
            inv[v].append(u)  
    return inv
```

Q3.

Écrire une fonction `colorationValide(d: dict, L: list) -> bool` qui vérifie si une coloration L (liste de couleurs indexée par les sommets dans l'ordre des clés du dictionnaire) est valide, c'est-à-dire que deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.

```
def colorationValide(d: dict, L: list) -> bool:  
    for u in d:  
        for v in d[u]:  
            if L[u] == L[v]:  
                return False  
    return True
```

Q4.

Discuter la complexité dans le pire des cas de l'algorithme `colorationValide`.

Soit N le nombre de sommets et M le nombre d'arcs. La boucle extérieure parcourt les N sommets. Pour chaque sommet u , la boucle intérieure parcourt ses voisins. Au total, on examine chaque arc une seule fois, soit M itérations. L'accès à $L[u]$ et $L[v]$ est $O(1)$. La complexité dans le pire des cas est donc $O(N + M)$.

Q5.

On considère une base de données comportant deux tables :

- FILMS (codefilm : int, nomfilm : text, ...);
- LOCATIONS (codeloc : int, codefilm : int, duree : int, ...).

Écrire une requête SQL renvoyant la durée maximale de location.

```
SELECT MAX(duree) FROM LOCATIONS;
```

Q6.

Écrire une requête SQL renvoyant le code, le nom et la durée moyenne de location des films dont la durée moyenne de location est inférieure à 2 jours, classés par durée moyenne décroissante.

```
SELECT FILMS.codefilm, FILMS.nomfilm,
       AVG(LOCATIONS.duree) AS duree_moy
FROM FILMS
JOIN LOCATIONS ON FILMS.codefilm = LOCATIONS.codefilm
GROUP BY FILMS.codefilm, FILMS.nomfilm
HAVING AVG(LOCATIONS.duree) < 2
ORDER BY duree_moy DESC;
```

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_{n+2}(X) = 2X P_{n+1}(X) - P_n(X) \quad (n \geq 0).$$

Q7.

Montrer par récurrence double que, pour tout $n \geq 1$, P_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} .

Pour $n = 1$: $P_1(X) = X$ est bien de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$. La propriété est vraie au rang 1.

Pour $n = 2$: $P_2(X) = 2X \cdot X - 1 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$. La propriété est vraie au rang 2.

Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$. Alors

$$P_{n+2} = 2X P_{n+1} - P_n.$$

Par hypothèse de récurrence, $\deg(P_{n+1}) = n + 1$ et $\deg(P_n) = n$, donc $\deg(2X P_{n+1}) = n + 2$ tandis que $\deg(P_n) = n$. Comme $n < n + 2$, le terme dominant provient de $2X P_{n+1}$:

$$\text{cd}(P_{n+2}) = 2 \cdot \text{cd}(P_{n+1}) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Ainsi P_{n+2} est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant $2^{(n+2)-1}$. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

$$P_n \text{ est de degré } n \text{ et } \text{cd}(P_n) = 2^{n-1} \text{ (} n \geq 1 \text{)}.$$

Q8.

Montrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Pour $n = 0$: $P_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0)$. Pour $n = 1$: $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$. La propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

Supposons-la vraie aux rangs n et $n + 1$. Alors

$$P_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta).$$

D'après la formule trigonométrique $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$,

$$2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta),$$

donc

$$P_{n+2}(\cos \theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta).$$

L'hérédité est prouvée. Par récurrence, pour tout n ,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

Q9.

Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$.

La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est polynomiale, donc continue sur $[-1, 1]$. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$ est continue sur $] - 1, 1[$ et présente une singularité intégrable aux bornes car

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow \pm 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 \mp t}},$$

et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$). Par conséquent,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ est bien défini pour tous } P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

Q10.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

— **Symétrie** : $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ par commutativité du produit dans \mathbb{R} .

— **Bilinéarité** : par linéarité de l'intégrale.

— **Positivité** : pour $P \neq 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2/\sqrt{1-t^2}$ est continue et positive sur $] - 1, 1[$, non identiquement nulle, donc son intégrale est strictement positive.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ est un produit scalaire.}$$

Q11.

Montrer que $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ pour $m \neq n$, où les P_n sont les polynômes de Tchebychev (première espèce).

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$. Effectuons le changement de variable $t = \cos \theta$, $dt = -\sin \theta d\theta$, $\sqrt{1-t^2} = \sin \theta$:

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(m\theta)\cos(n\theta)}{\sin \theta} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta.$$

En utilisant la formule $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$,

$$\int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta)) d\theta.$$

Pour $m \neq n$, $m+n \neq 0$ et $m-n \neq 0$, donc

$$\int_0^{\pi} \cos(k\theta) d\theta = \frac{\sin(k\pi)}{k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^*).$$

Pour $m = n \geq 1$,

$$\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta)) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $m = n = 0$, $\int_0^{\pi} d\theta = \pi$. Ainsi

$$\int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi & m = n = 0, \\ \pi/2 & m = n \geq 1. \end{cases}$$

Et $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ pour $m \neq n$.

$$\boxed{\langle P_m, P_n \rangle = 0 \quad (m \neq n).}$$

Q12.

Montrer que la famille $(P_k/\|P_k\|)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire. Calculer $\|P_n\|$.

D'après Q7, $\deg P_k = k$ pour tout k , donc (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par Q11, elle est orthogonale. Il suffit donc de la normer.

Calculons $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle$ pour $n \geq 1$:

$$\|P_n\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 0$, $\|P_0\|^2 = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$.

Donc $\|P_0\| = \sqrt{\pi}$ et $\|P_n\| = \sqrt{\pi/2}$ pour $n \geq 1$. La famille $(P_0/\sqrt{\pi}, P_1/\sqrt{2\pi}, \dots)$ est orthonormée.

$$\boxed{\|P_0\| = \sqrt{\pi}, \quad \|P_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (n \geq 1).}$$

PROBLÈME — Matrices de rang 1

Partie I — Exemples

On considère X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $U = (X_1, \dots, X_n)^T$ et $M = UU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q13.

Déterminer la loi de $Y = \text{rg}(M)$.

M est la matrice $(X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Ses colonnes sont toutes proportionnelles à U , donc $\text{rg}(M) \leq 1$.

$$\text{rg}(M) = 0 \iff U = 0 \iff \forall i, X_i = 0.$$

Par indépendance,

$$P(\text{rg}(M) = 0) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = (1 - p)^n.$$

Si $U \neq 0$, alors M a au moins une colonne non nulle donc $\text{rg}(M) = 1$. Ainsi

$$P(\text{rg}(M) = 1) = 1 - (1 - p)^n.$$

Y suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}(1 - (1 - p)^n)}.$$

Q14.

Calculer la trace de M et reconnaître sa loi.

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i,$$

car X_i étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_i^2 = X_i$. La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binomiale :

$$\boxed{\text{tr}(M) \sim \mathcal{B}(n, p)}.$$

Q15.

Montrer que M est une matrice de projection ($M^2 = M$) si et seulement si $\text{tr}(M) \in \{0, 1\}$.
Calculons M^2 :

$$M^2 = (UU^T)(UU^T) = U(U^T U)U^T = (U^T U)UU^T = (\text{tr}(M))M,$$

car $U^T U = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i = \text{tr}(M)$. Ainsi M est une projection ($M^2 = M$) ssi $\text{tr}(M)M = M$, soit $(\text{tr}(M) - 1)M = 0$.

- Si $M = 0$, alors $\text{tr}(M) = 0$ et l'équation est vérifiée.
- Si $M \neq 0$, on doit avoir $\text{tr}(M) = 1$.

Donc M est une projection ssi $\text{tr}(M) \in \{0, 1\}$.

$$\boxed{M^2 = M \iff \text{tr}(M) \in \{0, 1\}}.$$

Q16.

En déduire $P(M \text{ est une matrice de projection})$.

D'après Q15, M est une projection ssi $\text{tr}(M) \in \{0, 1\}$. Ici $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$, donc $X_i^2 \neq X_i$ en général. On a $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Sous la loi de Poisson :

$$P(X_i^2 = 0) = P(X_i = 0) = e^{-\lambda}, \quad P(X_i^2 = 1) = P(X_i = 1) = \lambda e^{-\lambda}.$$

Les X_i sont indépendantes, donc les X_i^2 aussi. Ainsi

$$P(\text{tr}(M) = 0) = (e^{-\lambda})^n = e^{-n\lambda},$$

$$P(\text{tr}(M) = 1) = n(\lambda e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{n-1} = n\lambda e^{-n\lambda}.$$

Par union de deux événements disjoints :

$$P(M \text{ projection}) = e^{-n\lambda}(1 + n\lambda).$$

Q17.

Diagonaliser la matrice J (matrice $n \times n$ ne contenant que des 1) en précisant la matrice de passage.

J est de rang 1 (toutes ses colonnes sont égales à $(1, \dots, 1)^\top$). On a $J^2 = nJ$, donc $\chi_J(X) = X^{n-1}(X - n)$, avec les valeurs propres 0 (multiplicité $n - 1$) et n (multiplicité 1).

— Pour la valeur propre n , un vecteur propre est $v_1 = (1, 1, \dots, 1)^\top$.

— Pour la valeur propre 0, une base de $\ker J$ est donnée par

$$v_2 = (1, -1, 0, \dots, 0)^\top, v_3 = (1, 0, -1, \dots, 0)^\top, \dots, v_n = (1, 0, 0, \dots, -1)^\top.$$

La matrice de passage P (mettant J sous forme diagonale) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}JP = \text{diag}(n, 0, \dots, 0).$$

$$J = P \text{diag}(n, 0, \dots, 0) P^{-1}.$$

Q18.

Soit A une matrice de rang 1 avec $\text{tr}(A) = 0$. Montrer que A est nilpotente. En déduire qu'elle n'est pas diagonalisable (sauf si $A = 0$). On explicitera un exemple 3×3 .

Si $\text{tr}(A) = 0$, alors d'après $A^2 = \text{tr}(A)A$, on a $A^2 = 0$. A est donc nilpotente d'indice 2 (sauf si $A = 0$). Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable (la seule valeur propre 0 n'annule pas un polynôme minimal à racines simples car $\mu_A(X) = X^2$).

Exemple explicite 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\text{rg}(A) = 1$, $A^2 = 0$, $\mu_A(X) = X^2$, $\text{tr}(A) = 0$.

$$A^2 = 0, \mu_A(X) = X^2 \implies A \text{ non diagonalisable.}$$

Partie II — Résultats généraux

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Q19.

Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A = CL$.

Puisque A est de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles à l'une d'entre elles, disons $C \neq 0$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, la j -ième colonne s'écrit $\ell_j C$ avec $\ell_j \in \mathbb{R}$. Alors $A = C(\ell_1 \cdots \ell_n)$. Notons L cette matrice ligne (non nulle). On a $A = CL$.

$$\boxed{A = CL, C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}.}$$

Q20.

Montrer que $LC = \text{tr}(A)$ et $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Les coefficients diagonaux de $A = CL$ sont $a_{ii} = c_i \ell_i$, donc

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n c_i \ell_i = LC \quad (\text{produit ligne-colonne}).$$

De plus,

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = (LC)CL = \text{tr}(A)A.$$

$$\boxed{LC = \text{tr}(A), \quad A^2 = \text{tr}(A)A.}$$

Q21.

Déterminer les polynômes caractéristique et minimal de A .

$\text{rg}(A) = 1$, donc $\dim \ker(A) = n - 1$ (théorème du rang). Ainsi 0 est valeur propre de multiplicité géométrique $n - 1$, donc de multiplicité algébrique au moins $n - 1$. Le polynôme caractéristique est de degré n et la somme des racines (complexes) est $\text{tr}(A)$. Par conséquent :

$$\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \text{tr}(A)).$$

D'après Q20, $A^2 = \text{tr}(A)A$, donc $X(X - \text{tr}(A))$ annule A . Déterminons μ_A selon les cas :

- Si $\text{tr}(A) = 0$, alors $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ (car $\text{rg}(A) = 1$), donc $\mu_A \neq X$ et $\mu_A(X) = X^2$.
- Si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors $A \neq \text{tr}(A)I_n$ (car $\text{rg}(A) = 1 < n$), donc μ_A ne peut être X ni $X - \text{tr}(A)$. Ainsi $\mu_A(X) = X(X - \text{tr}(A))$.

$$\boxed{\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \text{tr}(A)), \quad \mu_A(X) = \begin{cases} X^2 & \text{tr}(A) = 0, \\ X(X - \text{tr}(A)) & \text{tr}(A) \neq 0. \end{cases}}$$

Q22.

À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

A est diagonalisable ssi μ_A est scindé à racines simples, soit $\text{tr}(A) \neq 0$. En effet :

- Si $\text{tr}(A) \neq 0$, $\mu_A(X) = X(X - \text{tr}(A))$ a deux racines distinctes 0 et $\text{tr}(A)$.
- Si $\text{tr}(A) = 0$, $\mu_A(X) = X^2$ a une racine double ; A n'est pas diagonalisable (sauf si $A = 0$, mais $\text{rg}(A) = 1$ implique $A \neq 0$).

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \text{tr}(A) \neq 0.}$$

Q23.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A . On suppose $\text{Im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle $\text{Mat}(u) = E_{1,2}$ (matrice avec un 1 en $(1,2)$ et des 0 ailleurs).

$\dim \text{Im}(u) = 1$ et $\dim \ker(u) = n - 1$. L'intersection $\text{Im}(u) \cap \ker(u)$ est un sous-espace non réduit à $\{0\}$, donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ (car $\text{Im}(u)$ est une droite). Puisque $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$, $u \circ u = 0$, donc $A^2 = 0$, ce qui correspond à $\text{tr}(A) = 0$ d'après Q20.

Choisissons $e_1 \notin \ker(u)$ et posons $e_2 = u(e_1) \neq 0$. Alors $e_2 \in \text{Im}(u) \subset \ker(u)$. La famille (e_1, e_2) est libre. Complétons (e_2, \dots, e_n) en une base de $\ker(u)$ (dimension $n - 1$). Dans la base (e_1, \dots, e_n) , $u(e_1) = e_2$ et $u(e_k) = 0$ pour $k \geq 2$. Ainsi

$$\boxed{\text{Mat}(u) = E_{1,2}.}$$

Q24.

On suppose $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle $\text{Mat}(u) = \text{diag}(\text{tr}(A), 0, \dots, 0)$.

$\dim \text{Im}(u) = 1$, $\dim \ker(u) = n - 1$, et l'intersection est nulle, donc $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = \mathbb{R}^n$. Soit e_1 une base de $\text{Im}(u)$. Comme $e_1 \in \text{Im}(u)$, $u(e_1) = ae_1$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Puisque $e_1 \notin \ker(u)$, $a \neq 0$. De plus $a = \text{tr}(A)$ car la trace est la somme des valeurs propres. Complétons (e_2, \dots, e_n) en une base de $\ker(u)$. Dans (e_1, \dots, e_n) , $u(e_1) = \text{tr}(A)e_1$ et $u(e_k) = 0$ pour $k \geq 2$. Donc

$$\boxed{\text{Mat}(u) = \text{diag}(\text{tr}(A), 0, \dots, 0).}$$

Q25.

Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

(\Rightarrow) Si A et B sont semblables, elles ont même trace (la trace est un invariant de similitude).

(\Leftarrow) Supposons $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

— Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$, alors d'après Q23, A et B sont toutes deux semblables à $E_{1,2}$, donc semblables entre elles par transitivité.

— Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \neq 0$, alors d'après Q24, A et B sont toutes deux semblables à $\text{diag}(\text{tr}(A), 0, \dots, 0) = \text{diag}(\text{tr}(B), 0, \dots, 0)$, donc semblables entre elles.

$$\boxed{\text{Deux matrices de rang 1 sont semblables} \iff \text{elles ont même trace.}}$$