SESSION 2000 MP005

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Le problème proposé a pour but la démonstration d'un théorème relatif aux contractions d'un espace de Banach et l'étude, grâce à ce théorème, d'une équation fonctionnelle.
Si X et Y sont des ensembles, Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y.
Si X est un ensemble non vide, $\mathcal{N}_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup(\{|f(x)| : x \in X\})$.

I. Convergence uniforme dans $C([0,1],\mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, pour $\mathcal{N}_\infty$, de $C([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit f la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que f est bornée et que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3. Justifier que $(C([0,1],\mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ est un espace de Banach.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $C([0,1],\mathbb{R})$ définie par : $u_n(x) = e^{x^n}$ pour tout $x \in [0,1]$.
Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$?

5. Soit $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $C([0,1],\mathbb{R})$ définie par : $\mathrm{v}_n(x) = \int_0^x e^{t^n}\,dt$ pour tout $x \in [0,1]$.
Montrer que $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers un élément v de $C([0,1],\mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

II. Théorème du point fixe de Banach

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach réel, soit A un sous-ensemble fermé non vide de E et soit $T \in A^A$ vérifiant : il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que $\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in A^2$ (on dit que T est contractante ou encore que T est une contraction).

1. Soit $(x, y) \in A^2$ tel que : $T(x) = x, T(y) = y$. Montrer que $x = y$.

2. Soit $a \in A$, on définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $a_0 = a, \quad a_{n+1} = T(a_n)$.

2.1 Montrer que : $\|a_{n+1} - a_n\| \leq \alpha^n \|a_1 - a_0\|$. En déduire que si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on a : $\|a_{n+p} - a_n\| \leq \|a_1 - a_0\| \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{n+i} \right)$.

2.2 Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est élément de A.

2.3 Montrer que T possède un unique point fixe qui est la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On établit ainsi le théorème du point fixe de Banach « Toute contraction T d'un fermé non vide A d'un espace de Banach possède un point fixe unique, de plus si $a \in A$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a$, $a_{n+1} = T(a_n)$, converge vers ce point fixe ».

3. On suppose que $A = E$, soit alors, $U \in E^E$ définie par : $U(x) = x + T(x)$.

3.1 Montrer que U est une bijection continue de E sur E.

3.2 Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \|x - y\|$ (U est donc un homéomorphisme de E sur E).

4. Soit $\mathcal{L}(E) = \{V \in E^E : (V \text{ linéaire}) \text{ et } (V \text{ continue})\}$, on note encore $\|V\| = \sup(\{\|V(x)\| : \|x\| \leq 1\})$ la norme subordonnée de V $(V \in \mathcal{L}(E))$; soit I l'identité de E.

4.1 Soit $V \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|V\| < 1$, montrer que V est contractante.

4.2 Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E)$ et soit $V \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\|V_n\| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|V\| < 1$, $\|V_n - V\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $y \in E$ alors, d'après **3.** $I + V_n$ et $I + V$ sont des isomorphismes de E ; on peut donc définir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((I+V_n)^{-1}(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = (I+V)^{-1}(y)$, montrer que : $\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

(on aura intérêt à écrire : $V(x) - V_n(x_n) = \left(V(x) - V_n(x)\right) + \left(V_n(x - x_n)\right)$).

III. Etude d'une transformation de l'ensemble $C([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dira que φ est de type $\mathcal{U}$ si :

φ est continue et, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait :
$|\varphi(x,y,z) - \varphi(x,y,z')| \leq r|z - z'|$ pour tout $(x,y,z,z') \in [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe $(\Psi, M) \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\times\mathbb{R}_+$ tel que : $\varphi = \Psi\big|_{[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}}$ et $\left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}(x,y,z)\right| \leq M$ pour tout $(x,y,z) \in [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}$, alors φ est de type $\mathcal{U}$.

2. On suppose que φ est de type $\mathcal{U}$.

2.1 Soit $u \in C([0,1],\mathbb{R})$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $\left(y \to \varphi(x,y,u(y))\right) \in C([0,1],\mathbb{R})$.

2.2 Montrer que l'on peut définir $T_\varphi : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ par :
$\left(T_\varphi(u)\right)(x) = \int_0^1 \varphi(x,y,u(y))\,dy$.
Montrer que, pour tout $u \in C([0,1],\mathbb{R})$, $T_\varphi(u) \in C([0,1],\mathbb{R})$.

2.3 Montrer que l'on a :
$\mathcal{N}_\infty\left(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)\right) \leq r\,\mathcal{N}_\infty(u_1 - u_2)$, pour tout $(u_1,u_2) \in (C([0,1],\mathbb{R}))^2$.

2.4 On définit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_{(\varphi,\lambda)} : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ par : $S_{(\varphi,\lambda)}(u) = u + \lambda\,T_\varphi(u)$.
On suppose $r > 0$, montrer que l'on a : $\lambda \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[\Rightarrow S_{(\varphi,\lambda)}$ est un homéomorphisme de $(C([0,1],\mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ sur lui même.

3. Soit $\mu \in C([0,1]^2,\mathbb{R})$, soit $\varphi : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x,y,z)=\mu(x,y)z$; on supposera $\mu \neq 0$.

3.1 Montrer que φ est de type $\mathcal{U}$ et que si $\lambda \in \left]-1/\mathcal{N}_\infty(\mu), 1/\mathcal{N}_\infty(\mu)\right[$, on a : $S_{(\varphi,\lambda)}$ est un isomorphisme de $(C([0,1],\mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$, sur lui même.

3.2 Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([0,1]^2,\mathbb{R})$, telle que : $\mathcal{N}_\infty(\mu_n-\mu)\underset{n\to+\infty}{\to}0$. On note $\|\ \|_\infty$ la norme subordonnée, associée à $\mathcal{N}_\infty$, définie sur $\mathcal{L}(C([0,1],\mathbb{R}))$. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de $C([0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi_n(x,y,z)=\mu_n(x,y)z$ montrer que : $\left\|T_{\varphi_n}-T_\varphi\right\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

IV. Etude d'une application

On considère l'équation intégrale de Fredholm : (E) $w(x)=x+\int_0^1 \sin(xy)\,w(y)dy$.

Une solution de (E) (s'il en existe) est donc un élément w de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ tel que, pour tout $x\in[0,1]$, on ait : $w(x)=x+\int_0^1 \sin(xy)w(y)dy$. On s'intéresse à la résolution de (E) dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer, en utilisant III) que (E) possède une solution unique $w\in C([0,1],\mathbb{R})$.

2. Soit, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de $C([0,1]^2,\mathbb{R})$ définie par : $v_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!}(xy)^{2i-1}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on définit l'équation intégrale (E_n) par : $w_n(x)=x+\int_0^1 v_n(x,y)\ w_n(y)\,dy$.

2.1 Montrer que (E_1) possède une solution unique $w_1\in C([0,1],\mathbb{R})$ et expliciter w_1.

2.2 Montrer que, pour tout $n\geq 2$, la résolution de (E_n) se ramène à celle d'un système linéaire que l'on explicitera.

2.3 Montrer, en utilisant III.3) que, si $n\geq 2$, (E_n) possède une solution unique $w_n\in C([0,1],\mathbb{R})$. (on aura intérêt à montrer que : $-1\in\left]-1/\mathcal{N}_\infty(v_n), 1/\mathcal{N}_\infty(v_n)\right[$ si $n\geq 2$).

2.4 Montrer que $\mathcal{N}_\infty(w_n-w)\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE. — D'après documents fournis.