# Proposition de Corrigé
# Concours Commun INP 2026 – Mathématiques 1 (Filière MP)

## EXERCICE I — Requêtes SQL

On dispose des deux tables relationnelles suivantes :

- ELEVES(<u>id</u>, nom, prenom, email, promo),
- PAIEMENTS(<u>id</u>, id_eleve, montant, date_paiement).

### Q1.

Écrire une requête SQL qui sélectionne les adresses email des élèves dont la promo est différente de 2025, sans doublon.

On utilise `SELECT DISTINCT` pour éliminer les doublons et `WHERE` pour filtrer sur la promo :

```
SELECT DISTINCT email FROM ELEVES WHERE promo <> 2025
```
.

### Q2.

Écrire une requête SQL qui calcule, pour chaque élève, le montant total payé (somme des montants dans `PAIEMENTS`), et trie le résultat par nom puis prénom.

On effectue une jointure entre `ELEVES` et `PAIEMENTS` sur l'identifiant, on agrège par `GROUP BY` sur les colonnes `nom` et `prenom`, et on trie avec `ORDER BY` :

```
SELECT E.nom, E.prenom, SUM(P.montant)
FROM ELEVES E JOIN PAIEMENTS P ON E.id = P.id_eleve
GROUP BY E.nom, E.prenom
ORDER BY E.nom, E.prenom
```

### Q3.

Écrire une requête SQL qui sélectionne les identifiants et emails des élèves apparaissant plusieurs fois dans la table `ELEVES` (même combinaison nom, prénom, email, promo).

On commence par identifier les quadruplets (nom, prenom, email, promo) présents au moins deux fois dans `ELEVES` grâce à `GROUP BY` et `HAVING COUNT(*) >= 2`, puis on sélectionne les identifiants et emails correspondants :

```
SELECT id, email FROM ELEVES
WHERE (nom, prenom, email, promo) IN
    (SELECT nom, prenom, email, promo
    FROM ELEVES
    GROUP BY nom, prenom, email, promo
    HAVING COUNT(*) >= 2)
```

**Q4.**

Écrire une requête SQL qui sélectionne les identifiants des élèves n'ayant effectué aucun paiement.

On utilise `NOT IN` avec une sous-requête sur `PAIEMENTS` :

```
SELECT id FROM ELEVES WHERE id NOT IN (SELECT id_eleve FROM PAIEMENTS)
```
.

## EXERCICE II — Fonctions génératrices et loi de Poisson

Dans tout l'exercice, $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé. On note $G_X$ leur fonction génératrice définie par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\, t^n, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Q5.**

Justifier que $G_X$ est définie (converge absolument) pour $t \in [-1, 1]$.

Soit $t \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X = n)\, t^n| = \mathbb{P}(X = n)\, |t|^n \leq \mathbb{P}(X = n),$$

car $|t|^n \leq 1$. La série $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge et a pour somme 1 (probabilités totales). Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \mathbb{P}(X = n)\, |t|^n$ converge. Ainsi $G_X(t)$ est absolument convergente pour tout $t \in [-1, 1]$.

$$\boxed{G_X \text{ est définie (au moins) sur } [-1, 1]}.$$

**Q6.**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer $G_X$.

Par définition, $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [-1, 1]$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}\, t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

$$\boxed{G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad \text{pour } t \in [-1, 1]}.$$

**Q7.**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t), \qquad t \in [-1, 1].$$

Par définition et par indépendance de $X$ et $Y$,

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = n)\, t^n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la loi de $X+Y$ s'obtient par convolution :

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=n-j).$$

Ainsi, pour $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=n-j)\,t^n = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k)\,t^{j+k} \quad (k=n-j) \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j)\,t^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)\,t^k\Big) = G_X(t)\,G_Y(t). \end{aligned}$$

Le produit est bien le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes sur $[-1,1]$ (Q5), ce qui justifie la manipulation.

$$\boxed{G_{X+Y} = G_X\,G_Y \text{ sur } [-1,1]}.$$

## Q8.

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.
D'après Q6 et Q7, pour $t \in [-1,1]$,

$$G_Z(t) = G_X(t)\,G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}\,e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$ (Q6). Par caractérisation de la loi par la fonction génératrice, on conclut

$$\boxed{Z \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)}.$$

# PROBLÈME

**Formule sommatoire de Poisson et noyau de Poisson**

## Partie I — Calcul d'une intégrale

On pose pour $x > 0$ :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,e^{it}\,dt.$$

## Q9.

Montrer que $g(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

Soit $x > 0$ fixé. La fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\,e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). On étudie la convergence absolue de l'intégrale :

$$|\varphi_x(t)| = \frac{x}{x^2+t^2}.$$

Au voisinage de 0, $\dfrac{x}{x^2+t^2} \sim \dfrac{1}{x}$, donc l'intégrale converge en 0 (intégrale d'une fonction continue sur un segment). Au voisinage de $\pm\infty$, $\dfrac{x}{x^2+t^2} \sim \dfrac{x}{t^2}$, qui est intégrable (intégrale de Riemann avec exposant $2 > 1$). Ainsi $\varphi_x$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et $g(x)$ est bien définie.

$$\boxed{g(x) \text{ est bien définie pour tout } x > 0}.$$

## Q10.

Effectuer le changement de variable $u = t/x$ et simplifier $g(x)$.

La fonction $t \mapsto u = t/x$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $dt = x\,du$. On obtient

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+(xu)^2}\, e^{ixu}\, x\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2(1+u^2)}\, e^{ixu}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du.$$

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du}.$$

## Q11.

Déterminer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

D'après Q10, $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du$. Posons

$$\varphi(x,u) = \frac{e^{ixu}}{1+u^2}, \qquad (x,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

$\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour $x \in [0,1]$,

$$|\varphi(x,u)| = \frac{1}{1+u^2} \in L^1(\mathbb{R}),$$

ce qui fournit une domination uniforme au voisinage de 0. Par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $g$ est continue en 0 (prolongée par $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$). Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \big[\arctan u\big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = \pi}.$$

## Q12.

Montrer que $g$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$.

On considère le noyau $K(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}\, e^{it}$. $K$ est $C^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Pour $x > 0$,

- $K(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (Q9).
- $\dfrac{\partial K}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\, e^{it}$. Pour tout $x \geq a > 0$,

$$\Big|\frac{\partial K}{\partial x}(x,t)\Big| \leq \frac{t^2+x^2}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{t^2+x^2}{(a^2+t^2)^2}.$$

  Au voisinage de l'infini, cette fonction est $\sim \dfrac{1}{t^2}$, donc intégrable. Localement uniformément pour $x > 0$, $\frac{\partial K}{\partial x}$ est dominée par une fonction intégrable indépendante de $x$.
- $\dfrac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\right) e^{it} = \dfrac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\, e^{it}$. Pour $x \geq a > 0$,

$$\Big|\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)\Big| \leq \frac{2x(x^2+3t^2)}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{C}{a^2+t^2}$$

  pour une constante $C$ convenable (car pour $|t|$ grand, $\dfrac{2x(x^2+3t^2)}{(x^2+t^2)^3} \sim \dfrac{6x}{t^4}$, ce qui est intégrable).

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral (version $C^k$ de Leibniz), $g$ est $C^2$ sur $]0,+\infty[$, et pour $x>0$,

$$g'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\,e^{it}\,dt,\qquad g''(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\,e^{it}\,dt.$$

$$\boxed{g\in C^2(]0,+\infty[)}.$$

## Q13.

En utilisant l'harmonicité de $h(x,t)=\dfrac{x}{x^2+t^2}$, établir que $g$ vérifie l'équation différentielle $g''(x)-g(x)=0$.

On note $h(x,t)=\dfrac{x}{x^2+t^2}$. Un calcul direct donne :

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{2xt}{(x^2+t^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=-\frac{2x(x^2+t^2)^2-2xt\cdot 2t\cdot 2(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^4}=\frac{2x(3t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^3}.$$

On vérifie que $\Delta h=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}=0$ :

$$\frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}+\frac{2x(3t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^3}=0.$$

Ainsi $h$ est harmonique sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, soit

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}.$$

D'après Q12,

$$g''(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\,e^{it}\,dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t)\,e^{it}\,dt.$$

Effectuons deux intégrations par parties successives sur $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,e^{it}\,dt$. Pour $|t|\to+\infty$, $h(x,t)\sim\dfrac{x}{t^2}$, $\dfrac{\partial h}{\partial t}\sim-\dfrac{2x}{t^3}$, donc les termes de bord s'annulent :

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t}\,e^{it}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

Première intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,e^{it}\,dt=\left[\frac{\partial h}{\partial t}\,e^{it}\right]_{-\infty}^{+\infty}-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial t}\,e^{it}\,dt=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial t}\,e^{it}\,dt.$$

Seconde intégration par parties (les termes de bord s'annulent encore) :

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial t}\,e^{it}\,dt=-i\Big(\Big[h\,e^{it}\Big]_{-\infty}^{+\infty}-i\int_{-\infty}^{+\infty}h\,e^{it}\,dt\Big)=-\int_{-\infty}^{+\infty}h\,e^{it}\,dt=-g(x).$$

On a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,e^{it}\,dt=-g(x)$, et par suite

$$g''(x)=-\big(-g(x)\big)=g(x),$$

soit

$$\boxed{g''(x)-g(x)=0\quad\text{pour tout } x>0}.$$

## Q14.

Déterminer $g(x)$ pour tout $x > 0$.

L'équation caractéristique de $y'' - y = 0$ est $r^2 - 1 = 0$, de racines $r = \pm 1$. La solution générale est donc

$$g(x) = A\,e^{x} + B\,e^{-x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

D'après Q10,

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi,$$

donc $g$ est bornée sur $]0, +\infty[$. Si $A \neq 0$, $|g(x)| \sim |A| e^{x} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, ce qui contredit la bornitude. Nécessairement $A = 0$.

D'après Q11, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \pi$, donc $B = \pi$.

Ainsi

$$\boxed{g(x) = \pi\,e^{-x} \quad \text{pour tout } x > 0}.$$

## Partie II — Formule sommatoire de Poisson

On pose $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n).$$

## Q15.

Montrer que $F$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle est 1-périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq N$ avec $N$ assez grand, $|x+n| \geq \frac{n}{2}$, donc $f(x+n) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2} \leq \dfrac{4}{n^2}$. De même pour les termes négatifs. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison la série $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ converge absolument. Ainsi $F(x)$ est bien définie.

Vérifions la 1-périodicité :

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+1+n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) \quad (m = n+1) = F(x).$$

$$\boxed{F \text{ est bien définie et 1-périodique}}.$$

## Q16.

Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $f_n : x \mapsto f(x+n)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec $|n|$ assez grand, $|f_n(x)| \leq \dfrac{C}{n^2}$ (indépendamment de $x$). La série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément). La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue. Ainsi $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}}.$$

## Q17.

Exprimer les coefficients de Fourier exponentiels de $F$ sous forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.

Puisque $F$ est 1-périodique et continue, ses coefficients de Fourier exponentiels sont définis pour $k \in \mathbb{Z}$ par

$$c_k(F) = \int_0^1 F(t)\, e^{-2i\pi kt}\, dt.$$

En substituant la définition de $F$,

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)\, e^{-2i\pi kt}\, dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)\, e^{-2i\pi kt}\, dt, \end{aligned}$$

l'interversion somme-intégrale étant justifiée par la convergence normale de la série de fonctions sur $[0, 1]$ (Q15–Q16). Effectuons le changement de variable $u = t + n$ :

$$\int_0^1 f(t+n)\, e^{-2i\pi kt}\, dt = \int_n^{n+1} f(u)\, e^{-2i\pi k(u-n)}\, du = e^{2i\pi kn} \int_n^{n+1} f(u)\, e^{-2i\pi ku}\, du.$$

Comme $e^{2i\pi kn} = 1$, on obtient

$$c_k(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)\, e^{-2i\pi ku}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi ku}\, du.$$

$$\boxed{c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2}\, du, \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

## Q18.

Soit $n, k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\, dt$.

Si $n + k = 0$, alors $e^{-2i\pi(n+k)t} = 1$ et l'intégrale vaut 1. Si $n + k \neq 0$,

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\, dt = \left[\frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)}\right]_0^1 = \frac{e^{-2i\pi(n+k)} - 1}{-2i\pi(n+k)} = 0,$$

car $e^{-2i\pi m} = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\, dt = \begin{cases} 1, & n+k = 0, \\ 0, & n+k \neq 0. \end{cases}}$$

# Partie III — Synthèse et application

## Q19.

En utilisant les résultats des parties I et II, calculer $c_k(F)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

D'après Q17,

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2}\, du.$$

Pour $k = 0$, $c_0(F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$.

Pour $k \geq 1$, posons $x = 2\pi k > 0$. D'après Q10 et Q14,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\, du = \pi\, e^{-x}.$$

Avec $x = 2\pi k$, on a $g(2\pi k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi ku}}{1+u^2}\, du = \pi\, e^{-2\pi k}$. Or $c_k(F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2}\, du$. Par le changement de variable $u \mapsto -u$, on obtient la même intégrale : $c_k(F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi ku}}{1+u^2}\, du = g(2\pi k) = \pi\, e^{-2\pi k}$.

Pour $k \leq -1$, notons $k = -m$ avec $m \geq 1$. Alors $c_k(F) = c_{-m}(F) = \overline{c_m(F)} = \pi\, e^{-2\pi m} = \pi\, e^{2\pi k}$ (car $e^{2\pi k} = e^{-2\pi|k|}$). En résumé :

$$\boxed{c_0(F) = \pi, \qquad c_k(F) = \pi\, e^{-2\pi|k|} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}.$$

## Q20.

On définit

$$G(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(F)\, e^{2i\pi kx}.$$

Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que $G$ est continue et 1-périodique.

D'après Q19, $|c_k(F)| = \pi\, e^{-2\pi|k|}$. Pour $k \neq 0$, $\pi\, e^{-2\pi|k|}$ est le terme général d'une série géométrique convergente (raison $e^{-2\pi} < 1$). Par conséquent, la série de Fourier $\sum c_k(F)\, e^{2i\pi kx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La somme $G$ d'une série normalement convergente de fonctions continues est continue. Chaque terme $e^{2i\pi kx}$ est 1-périodique, donc $G$ l'est aussi.

$$\boxed{G \text{ est continue et 1-périodique}}.$$

## Q21.

En utilisant un théorème d'unicité des coefficients de Fourier, montrer que $F = G$ sur $\mathbb{R}$.

D'après Q16 et Q20, $F$ et $G$ sont toutes deux continues et 1-périodiques. Par construction (Q17), $F$ a pour coefficients de Fourier $c_k(F)$. $G$ est définie comme la série de Fourier de $F$, donc $c_k(G) = c_k(F)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (par identification des coefficients de la série trigonométrique $G$). Le théorème d'unicité des coefficients de Fourier pour les fonctions continues 1-périodiques assure que $F = G$ (deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales).

$$\boxed{F = G \text{ sur } \mathbb{R}}.$$

## Q22.

En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

D'après Q19, Q20 et Q21,

$$\begin{aligned} F(x) &= \pi + \sum_{k=1}^{+\infty} \pi\, e^{-2\pi k} \left(e^{2i\pi kx} + e^{-2i\pi kx}\right) \\ &= \pi + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\pi k} \cos(2\pi kx). \end{aligned}$$

Posons $r = e^{-2\pi}$ et $\theta = 2\pi x$. Exprimons la somme à l'aide de la série géométrique :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k e^{ik\theta} = \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}, \qquad \text{car } 0 \leq r < 1.$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
1+2\sum_{k=1}^{+\infty} r^k\cos(k\theta) &= 1+\sum_{k=1}^{+\infty} r^k\big(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\big)\\
&= 1+\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}+\frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}.
\end{aligned}
$$

Réduisons au même dénominateur :

$$
\begin{aligned}
1+\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}+\frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} &= \frac{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})+re^{i\theta}(1-re^{-i\theta})+re^{-i\theta}(1-re^{i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}\\
&= \frac{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2+re^{i\theta}-r^2+re^{-i\theta}-r^2}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2}\\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
F(x)=\pi\cdot\frac{1-e^{-4\pi}}{1-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)+e^{-4\pi}}.
$$

$$
\boxed{F(x)=\pi\,\frac{1-e^{-4\pi}}{1-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)+e^{-4\pi}},\quad x\in\mathbb{R}}.
$$