

Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2026 – Mathématiques 2 (Filière
MP/MPI)

EXERCICE 1

On note $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q1.

Déterminer le rang de J , la dimension de $\ker J$, calculer J^2 , donner le polynôme minimal de J et montrer que J est diagonalisable.

Les trois colonnes de J sont identiques et non nulles, donc $\text{rg}(J) = 1$. Par le théorème du rang,

$$\dim \ker J = 3 - \text{rg}(J) = 2.$$

Ainsi 0 est valeur propre de J et $\dim E_0(J) = 2$.

On calcule J^2 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J.$$

Donc $J(J - 3I_3) = 0$, et J est annulée par $X(X - 3)$. Le polynôme $X(X - 3)$ est scindé à racines simples, donc J est diagonalisable. Comme $J \neq 0$ et $J \neq 3I_3$, le polynôme minimal de J est

$$\boxed{\pi_J(X) = X(X - 3)}.$$

En outre, $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 3 est valeur propre et $\dim E_3(J) = 1$.

Q2.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = aJ + bI_3$. Montrer que A est semblable à $\text{diag}(b, b, 3a + b)$.

D'après Q1, il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = D = \text{diag}(0, 0, 3)$. Alors

$$P^{-1}AP = aP^{-1}JP + bP^{-1}I_3P = aD + bI_3 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A \text{ est semblable à } \text{diag}(b, b, 3a + b)}.$$

Q3.

Déterminer le polynôme minimal de A et montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

D'après Q2, les valeurs propres de A sont b (d'ordre 2) et $3a + b$. A est diagonalisable car elle est semblable à une matrice diagonale. Son polynôme minimal est le polynôme unitaire ayant pour racines simples et exactement les valeurs propres distinctes de A . Donc

$$\boxed{\pi_A(X) = (X - b)(X - 3a - b)}.$$

Q4.

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ de deux façons :

a) par utilisation du polynôme minimal de A et division euclidienne ;

b) en utilisant $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$ et la formule du binôme.

a) Par division euclidienne de X^n par $\pi_A(X) = (X - b)(X - 3a - b)$, il existe $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg R_n < 2$ tels que

$$X^n = \pi_A(X)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n.$$

En évaluant en b et $3a + b$ (racines de π_A) :

$$\begin{cases} b^n = \alpha_n b + \beta_n, \\ (3a + b)^n = \alpha_n(3a + b) + \beta_n. \end{cases}$$

On résout :

$$\alpha_n = \frac{(3a + b)^n - b^n}{3a}, \quad \beta_n = b^n - \frac{(3a + b)^n - b^n}{3a} b.$$

Comme $\pi_A(A) = 0$, on a $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$, soit

$$\boxed{A^n = \frac{(3a + b)^n - b^n}{3a} A + \left(b^n - \frac{(3a + b)^n - b^n}{3a} b \right) I_3}.$$

b) Montrons par récurrence que $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$. C'est vrai pour $k = 1$. Si c'est vrai au rang k , alors $J^{k+1} = J^k J = 3^{k-1} J^2 = 3^{k-1} \cdot 3J = 3^k J$. Ainsi la formule est vérifiée.

Puisque $A = aJ + bI_3$ et que J et I_3 commutent, on applique la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aJ + bI_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k J^k b^{n-k} = b^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k 3^{k-1} J b^{n-k} = b^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} \right) J.$$

Or $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} = (3a + b)^n$, donc $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} = (3a + b)^n - b^n$. On obtient

$$\boxed{A^n = b^n I_3 + \frac{(3a + b)^n - b^n}{3} J}.$$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, $n \geq 2$ est un entier. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\omega_k = \omega^k$ pour $0 \leq k \leq n - 1$ les racines n -ièmes de l'unité, et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j} = a_{(j-i) \bmod n}$, où $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$.

Q5.

On suppose $n = 3$ et on note $j = e^{2i\pi/3}$.

Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P(j)P(j^2) \in \mathbb{R}$.

On a $j^3 = 1$ et $j \neq 1$, donc

$$0 = j^3 - 1 = (j - 1)(1 + j + j^2) \implies 1 + j + j^2 = 0.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque P est à coefficients réels, $\overline{P(j)} = P(\bar{j}) = P(j^2)$. Donc

$$P(j)P(j^2) = P(j)\overline{P(j)} = |P(j)|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad P(j)P(j^2) = |P(j)|^2 \in \mathbb{R}}.$$

Q6.

Soit J la matrice de permutation associée au n -cycle $(1 \ 2 \ \dots \ n)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\pi_J(X) = X^n - 1$.

La matrice J vérifie $J^n = I_n$, donc $X^n - 1$ annule J . Montrons que la famille $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est libre. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k = 0$. Appliquons cette égalité au premier vecteur $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ de la base canonique. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $J^k e_1 = e_{k+1}$ (où (e_i) est la base canonique, avec $e_{n+1} = e_1$). On obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_{k+1} = 0,$$

et par indépendance des vecteurs de la base canonique, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc $\deg \pi_J \geq n$. Comme $\pi_J \mid X^n - 1$ et $\deg(X^n - 1) = n$,

$$\boxed{\pi_J(X) = X^n - 1}.$$

Q7.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $A = P(J)$.

On a $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$. Le calcul de J^k donne la matrice de la permutation puissance k : $(J^k)_{i,j} = 1$ si $j \equiv i + k \pmod{n}$ et 0 sinon. Par suite,

$$P(J) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$$

a pour coefficient (i, j) la somme des a_k tels que $j \equiv i + k \pmod{n}$, soit $(P(J))_{i,j} = a_{(j-i) \bmod n}$. C'est exactement la définition de A .

$$\boxed{A = P(J)}.$$

Q8.

En diagonalisant J , montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont $P(\omega^k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Le polynôme minimal de J est $\pi_J(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$. Donc J est diagonalisable et il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}JQ = \Delta = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}).$$

Alors pour $A = P(J)$,

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}P(J)Q = P(Q^{-1}JQ) = P(\Delta) = \text{diag}(P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1})).$$

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(A) = \{P(\omega^k) \mid 0 \leq k \leq n-1\}}.$$

Q9.

En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) \in \mathbb{R}$.

D'après Q8, A est semblable à $\text{diag}(P(\omega^k))$, donc $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$. Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par construction), donc $\det A \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) \in \mathbb{R}}.$$

PROBLÈME — Polynômes de Laguerre

On note $I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et

$$E = \left\{ f \in C^0(I, \mathbb{R}) \mid \int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt < +\infty \right\}.$$

Q10.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n+1$ de E muni d'une base orthonormée (e_0, \dots, e_n) . Montrer que pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

est le projeté orthogonal de x sur F , et que $\sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Soit $x \in E$. Le vecteur $y = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ appartient à F . Pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0,$$

donc $x - y \perp F$. Ainsi y est le projeté orthogonal de x sur F .

Par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2}.$$

Q11.

Montrer que pour tout $f, g \in E$, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I .

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $(a - b)^2 \geq 0$, donc $2ab \leq a^2 + b^2$ et $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Pour tout $t \in I$,

$$|f(t)g(t)|e^{-t} \leq \frac{f(t)^2 + g(t)^2}{2} e^{-t}.$$

Par hypothèse, $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}$ et $t \mapsto g(t)^2 e^{-t}$ sont intégrables sur I . Leur somme (divisée par 2) est intégrable, donc $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable par le critère de comparaison.

$$\boxed{t \mapsto f(t)g(t)e^{-t} \in L^1(I)}.$$

Q12.

Montrer que l'application

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) e^{-t} dt$$

définit un produit scalaire sur E .

D'après Q11, $\langle f, g \rangle$ est bien définie pour tous $f, g \in E$.

- **Symétrie** : $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ par commutativité du produit.
- **Bilinéarité** : par linéarité de l'intégrale et bilinéarité du produit dans \mathbb{R} .
- **Positivité** : $\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt \geq 0$.
- **Définie-positivité** : si $\langle f, f \rangle = 0$, alors $f(t)^2 e^{-t} = 0$ pour tout t (continuité et signe constant), donc $f = 0$.

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}.$$

Q13.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $F \subset E$ et que F est un sous-espace vectoriel de E .

Tout polynôme est continu sur I , donc $F \subset C^0(I, \mathbb{R})$. Soit $P \in F$ non nul, de degré d et de coefficient dominant a_d . Pour $t \rightarrow +\infty$,

$$P(t)^2 e^{-t} \sim a_d^2 t^{2d} e^{-t} = o(e^{-t/2}).$$

La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur I , donc par comparaison $\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$ converge. Ainsi $P \in E$. De plus, F est stable par combinaison linéaire et contient 0, donc F est un sous-espace vectoriel de E .

$$\boxed{F = \mathbb{R}_n[X] \subset E}.$$

Q14.

On pose $h_n(x) = x^n e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

a) Calculer $h_n^{(p)}(x)$ pour $0 \leq p \leq n$. Montrer que $h_n^{(p)} = 0$ si $p > n$.

Par la formule de Leibniz,

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^n) \frac{d^{p-k}}{dx^{p-k}}(e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\min(p,n)} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} e^{-x}.$$

Si $p < n$, cette expression est bien définie. Si $p = n$, on a $h_n^{(n)}(x) = n!((-1)^n e^{-x} + \dots)$. Si $p > n$, alors $\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = 0$ pour $k > n$, donc $h_n^{(p)}(x) = 0$.

b) Montrer que L_n est un polynôme. Préciser son degré et son coefficient dominant.

D'après la formule précédente,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} x^{n-k} e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

C'est bien un polynôme. Le terme de plus haut degré correspond à $k = 0$: $(-1)^n \frac{x^n}{n!}$. Donc

$$\boxed{\deg L_n = n, \quad \text{cd}(L_n) = \frac{(-1)^n}{n!}}.$$

Q15.

Soient $g \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties n fois, montrer que

$$\langle g, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

On a $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$ avec $h_n(x) = x^n e^{-x}$. Donc

$$\langle g, L_n \rangle = \int_0^{+\infty} g(t) L_n(t) e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt.$$

Effectuons n intégrations par parties. Chaque intégration par parties fait intervenir un terme de bord de la forme $[g^{(k)}(t) h_n^{(n-1-k)}(t)]_0^{+\infty}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Vérifions leur nullité :

- En $t = 0$: h_n a un zéro d'ordre n en 0, donc $h_n^{(p)}(0) = 0$ pour $p \leq n-1$. En particulier $h_n^{(n-1-k)}(0) = 0$ car $n-1-k \geq 0$ et même $n-1-k \geq 1$ pour $k \leq n-2$. Le terme de bord est donc nul en 0.
- En $t \rightarrow +\infty$: $h_n^{(n-1-k)}(t) \sim c t^{k+1} e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées, et $g^{(k)}(t)$ est polynomial, donc le produit tend vers 0.

Tous les termes de bord sont nuls. On a donc :

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

Ainsi

$$\boxed{\langle g, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt}.$$

Q16.

Montrer que les polynômes L_n sont deux à deux orthogonaux : $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Soient $i < j$. D'après Q15 appliqué à $g = L_i$ et $n = j$,

$$\langle L_i, L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t) t^j e^{-t} dt.$$

Comme $\deg L_i = i < j$, on a $L_i^{(j)} = 0$, donc $\langle L_i, L_j \rangle = 0$.

$$\boxed{\langle L_i, L_j \rangle = 0 \text{ pour } i \neq j}.$$

Q17.

Calculer $\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle$.
 D'après Q15 avec $g = L_n$,

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

Or $L_n^{(n)} = n! \operatorname{cd}(L_n) = n! \cdot \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n$. Donc

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Il reste à calculer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Montrons par récurrence que $I_n = n!$.

— **Initialisation** : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$.

— **Hérédité** : supposons $I_n = n!$. Pour I_{n+1} , on intègre par parties avec $u = t^{n+1}$, $v' = e^{-t}$, d'où $u' = (n+1)t^n$, $v = -e^{-t}$:

$$I_{n+1} = [-t^{n+1}e^{-t}]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = 0 + (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$, et

$$\boxed{\|L_n\|^2 = 1}.$$

Q18.

Soit $F_n = \operatorname{Vect}(L_0, \dots, L_n)$. Que vaut $p_{F_n}(g)$ pour $g \in E$?

D'après Q16 et Q17, la famille (L_0, \dots, L_n) est orthonormée dans F_n . Par Q10, le projeté orthogonal de g sur F_n est

$$\boxed{p_{F_n}(g) = \sum_{k=0}^n \langle g, L_k \rangle L_k}.$$

Q19.

Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel pour la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après Q10 appliqué à F_n ,

$$\sum_{k=0}^n \langle g, L_k \rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc la série $\sum \langle g, L_k \rangle^2$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \langle g, L_k \rangle^2 \leq \|g\|^2}.$$

Q20.

Soit $\alpha > -\frac{1}{2}$. On pose $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$. Montrer que $g_\alpha \in E$ et que l'inégalité de Bessel est une égalité pour g_α .

Pour tout $x \geq 0$, $g_\alpha(x)^2 e^{-x} = e^{-(2\alpha+1)x}$. Puisque $2\alpha + 1 > 0$, cette fonction est intégrable sur I :

$$\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)x} dx = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Calculons $\langle g_\alpha, L_n \rangle$ à l'aide de Q15. Pour $n \geq 0$, $g_\alpha^{(n)}(x) = (-\alpha)^n e^{-\alpha x}$. Donc

$$\langle g_\alpha, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-\alpha)^n e^{-\alpha t} t^n e^{-t} dt = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt.$$

Le changement de variable $u = (\alpha + 1)t$ donne

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt = \frac{1}{(\alpha+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

Donc

$$\langle g_\alpha, L_n \rangle = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

La série géométrique converge car

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} < 1 \iff \alpha^2 < (\alpha+1)^2 \iff \alpha^2 < \alpha^2 + 2\alpha + 1 \iff 2\alpha + 1 > 0 \iff \alpha > -\frac{1}{2},$$

ce qui est exactement l'hypothèse. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha, L_n \rangle^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(\alpha+1)^{2n+2}} = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} \right)^n = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \cdot \frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha+1}$$

On a bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha, L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$.

Pour $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$ ($\alpha > -\frac{1}{2}$), $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha, L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$.