Proposition de Corrigé
Concours Commun Mines-Ponts 2024 – Mathématiques 1
(Filière MP)

Thème : Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Q1.

Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. Comme $|e^{i\theta}| = 1$, le dénominateur $1 + te^{i\theta}$ s'annule en $t = -e^{-i\theta}$, qui est réel négatif seulement si $\theta = \pm\pi$, exclu. Donc f est bien définie et continue sur $]0;+\infty[$. Pour l'intégrabilité :

— En 0 : $|1 + te^{i\theta}| \to 1$, donc $|f(t)| \sim t^{x-1}$, intégrable car $x > 0$.

— En $+\infty$: $|1 + te^{i\theta}| \sim t$, donc $|f(t)| \sim t^{x-2}$, intégrable car $x < 1$.

Ainsi f est intégrable sur $]0;+\infty[$.

Q2.

On vérifie l'indication : $|1 + te^{i\theta}|^2 = 1 + 2t\cos\theta + t^2$. Pour $\theta \in [-\beta;\beta]$, $\cos\theta \geq \cos\beta$, donc $|1 + te^{i\theta}|^2 \geq 1 + 2t\cos\beta + t^2 = |1 + te^{i\beta}|^2 = (t + \cos\beta)^2 + \sin^2\beta$.

La dérivée partielle de l'intégrande par rapport à θ est

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} = \frac{-ite^{i\theta}\, t^{x-1}}{(1 + te^{i\theta})^2},$$

de module $\dfrac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2} \leq \dfrac{t^x}{|1 + te^{i\beta}|^2} = \dfrac{t^x}{(t + \cos\beta)^2 + \sin^2\beta}$.

Cette domination est intégrable sur $]0;+\infty[$ (équivalent à $t^x/\sin^2\beta$ en 0 et t^{x-2} en $+\infty$, tous deux intégrables car $x \in]0;1[$). Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, r est $\mathcal{C}^1$ et

$$r'(\theta) = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q3.

On a $g(\theta) = e^{ix\theta}r(\theta)$. On calcule :

$$g'(\theta) = ixe^{ix\theta}r(\theta) + e^{ix\theta}r'(\theta) = e^{ix\theta}\left[ix\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t - ie^{i\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t\right].$$

Avec $h(t) = \dfrac{t^x}{1 + te^{i\theta}}$, on a $h'(t) = \dfrac{xt^{x-1}(1 + te^{i\theta}) - t^x e^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2} = \dfrac{xt^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} - \dfrac{t^x e^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2}$.

Donc $ie^{ix\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t = g'(\theta)$.

Calcul des limites : $h(0) = 0$ (car $x > 0$) et $\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^x}{te^{i\theta}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{i\theta}} = 0$ car $x < 1$.

Par le théorème fondamental du calcul, $\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t = h(+\infty) - h(0) = 0$.

Donc $g'(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$: g **est constante**.

Q4.

g étant constante, $g(\theta) = g(-\theta)$. Donc :

$$\frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) = g(\theta)\,\frac{e^{ix\theta} - e^{-ix\theta}}{2i} = g(\theta)\sin(x\theta).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\frac{1}{1+te^{-i\theta}} - \frac{1}{1+te^{i\theta}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot\frac{te^{i\theta} - te^{-i\theta}}{(1+te^{-i\theta})(1+te^{i\theta})}\,\mathrm{d}t \\ &= 2i\sin\theta\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Divisant par $2i$: $g(\theta)\sin(x\theta) = \sin\theta\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t$.

Q5.

Dans l'intégrale de Q4, on pose $u = \frac{t+\cos\theta}{\sin\theta}$ (i.e. $t = u\sin\theta - \cos\theta$, $\mathrm{d}t = \sin\theta\,\mathrm{d}u$). Quand $t = 0$, $u = \cot\theta$; quand $t \to +\infty$, $u \to +\infty$. De plus $t^2 + 2t\cos\theta + 1 = (t+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \sin^2\theta(u^2+1)$. Donc :

$$\sin\theta\int_{\cot\theta}^{+\infty}\frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{\sin^2\theta(1+u^2)}\sin\theta\,\mathrm{d}u = \int_{\cot\theta}^{+\infty}\frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Q6.

Quand $\theta \to \pi^-$, $\cot\theta \to -\infty$, $\sin\theta \to 0^+$, $\cos\theta \to -1$.

Posons $\varphi_\theta(u) = \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2}\mathbf{1}_{u\geq\cot\theta}$. Pour $\theta \in [\pi/2;\pi[$, $u \geq \cot\theta$ implique $u\sin\theta - \cos\theta \geq 0$, et $u\sin\theta - \cos\theta \leq (|u|+1)$ (car $\sin\theta \leq 1$, $|\cos\theta| \leq 1$). Donc $\varphi_\theta(u) \leq \frac{(|u|+1)^x}{1+u^2} \in L^1(\mathbb{R})$ (car $x < 1$).

Convergence simple : $\varphi_\theta(u) \to \frac{1}{1+u^2}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (le domaine tend vers $\mathbb{R}$ tout entier et $(u\sin\theta-\cos\theta)^x \to 1^x = 1$).

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi.$$

Q7.

g est constante. La limite $\theta \to \pi^-$ donne $g\cdot\sin(\pi x) = \pi$, donc $g = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

En $\theta = 0$: $g(0) = e^0 r(0) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = g = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Partie II : Expression de la fonction sinus

Q8.

On découpe $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ et on change $t \mapsto 1/t$ dans la seconde :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$

Q9.

Pour $t \in [0;1[$, $\dfrac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k$. L'interversion est justifiée par le théorème de convergence monotone (après passage à la valeur absolue, la série est positive) ou par la domination $\sum |(-1)^k t^{k+x-1}| \leq t^{x-1}/(1-t)$ et l'intégrabilité en 0. Donc :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}.$$

Q10.

De même, $\int_0^1 \dfrac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1-x}$. Donc en combinant Q8 et Q9 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

Q11.

Dans la seconde série, on réindexe $m = n+1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1-x} = -\sum_{m=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^m}{m-x}$. Donc :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{-2x}{n^2-x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.$$

Q12.

On pose $x = y/\pi$ avec $y \in]0;\pi[$ (donc $x \in]0;1[$). La formule de Q11 donne $\dfrac{\pi}{\sin y} = \dfrac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^n \pi y/\pi}{n^2-(y/\pi)^2} = \dfrac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^n \pi y}{n^2\pi^2 - y^2}$.

On multiplie par $\dfrac{\sin y}{\pi}$:

$$1 = \frac{\sin y}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin y}{n^2\pi^2 - y^2} = \frac{\sin y}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin y}{y^2 - n^2\pi^2},$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin y}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin y}{y}.$

Partie III : Intégrale de Dirichlet généralisée

Q13.

Convergence. En 0 : $1-\cos^{2p+1} t \sim (2p+1)(1-\cos t) \sim (2p+1)t^2/2$, donc l'intégrande tend vers $(2p+1)/2$. En $+\infty$: $|1-\cos^{2p+1} t| \leq 2$, donc l'intégrande est $O(1/t^2)$, intégrable.

IPP. Posons $u = 1-\cos^{2p+1} t$, $v' = 1/t^2$, d'où $u' = (2p+1)\cos^{2p} t \sin t$, $v = -1/t$. Les termes aux bornes sont nuls (en 0 et en $+\infty$, $u/t \to 0$). Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1} t}{t^2}\, \mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2p} t \sin t}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Q14.

Sur $[n\pi - \pi/2; n\pi+\pi/2]$, on pose $t = u + n\pi$ ($u \in [-\pi/2;\pi/2]$) : $\cos(u+n\pi) = (-1)^n \cos u$, $\sin(u+n\pi) = (-1)^n \sin u$, $\cos^{2p}(t) = \cos^{2p}(u)$.

$$\int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \cos^{2p} t \,\frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^{2p}(u)\sin(u)}{u+n\pi}\, \mathrm{d}u.$$

On sépare $[-\pi/2;0]$ et $[0;\pi/2]$, en substituant $u \to -u$ dans le premier :

$$= (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(u)\sin(u)\left(\frac{1}{u+n\pi} - \frac{1}{n\pi - u}\right) \mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\sin(t)\frac{-2t}{n^2\pi^2 - t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Ce qui correspond bien à $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\frac{2(-1)^n t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2}\, \mathrm{d}t$.

Q15.

$\int_{\pi/2}^{+\infty} \cos^{2p} t \,\frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \cos^{2p} t\, \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$. Par Q14 et interversion (justifiée par domination : $|\cos^{2p} t \sin t/t| \leq 1/t$ et la série est dominée) :

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Q16.

$$\int_0^{+\infty} \cos^{2p} t\, \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2}\, \mathrm{d}t.$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \cdot \frac{\sin t}{t}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t^2}{t^2 - n^2\pi^2}\right] \mathrm{d}t.$$

Par Q12 avec $y = t$: $\displaystyle\frac{\sin t}{t}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t^2}{t^2 - n^2\pi^2}\right]$... En fait Q12 donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n y \sin y}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin y}{y}$, donc $\frac{\sin t}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2} = 1$. D'où :

$$\int_0^{+\infty} \cos^{2p} t\, \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2p}\, \mathrm{d}t.$$

Q17.

On développe $\left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p} = \dfrac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{i(2k-2p)t}$.

On regroupe les termes k et $2p-k$ (qui ont $\binom{2p}{k} = \binom{2p}{2p-k}$ et donnent $2\cos(2(p-k)t)$), et le terme central $k=p$ donne $\binom{2p}{p}$:

$$(\cos t)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).$$

Q18.

Par Q13 et Q16 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Par Q17 et les intégrales $\int_0^{\pi/2} \cos(2mt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sin(m\pi)}{2m} = 0$ pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \cdot \frac{(2p)!}{(p!)^2}.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\cdot \frac{\pi}{2^{2p+1}} \cdot \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

Q19.

$E(X_1) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0$, donc $E(S_n) = nE(X_1) = 0$ par linéarité.
$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 1 - 0 = 1$. Par indépendance : $V(S_n) = n$.

Q20.

Par indépendance de S et T :

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos S \cos T - \sin S \sin T) = E(\cos S)E(\cos T) - E(\sin S)E(\sin T).$$

Puisque T et $-T$ ont même loi, $E(\sin T) = E(\sin(-T)) = -E(\sin T)$, donc $E(\sin T) = 0$. D'où $E(\cos(S+T)) = E(\cos S)\,E(\cos T)$.

Q21.

Par récurrence. Pour $n=1$: $E(\cos(tX_1)) = \frac{1}{2}\cos(-t) + \frac{1}{2}\cos(t) = \cos t$. (Notons que X_1 et $-X_1$ ont même loi.)

Hérédité : $S_n = S_{n-1} + X_n$ avec S_{n-1} et X_n indépendantes, et X_n a même loi que $-X_n$. Par Q20 :

$$E(\cos(tS_n)) = E(\cos(tS_{n-1}))E(\cos(tX_n)) = (\cos t)^{n-1}\cos t = (\cos t)^n.$$

Q22.

Si $a > 0$: $|b| \le a$ implique $a + b \ge 0$, donc $|a+b| = a+b = |a| + \text{signe}(a)\cdot b$.
Si $a < 0$: $|b| \le |a| = -a$ implique $a+b \le 0$, donc $|a+b| = -(a+b) = -a-b = |a| + \frac{a}{|a|}b = |a| + \text{signe}(a)\cdot b$.

Application. S_{2n-1} est somme de $2n-1$ termes ± 1, donc S_{2n-1} est impaire, $S_{2n-1} \neq 0$ et $|S_{2n-1}| \ge 1 = |X_{2n}|$. On peut appliquer la formule avec $a = S_{2n-1}$, $b = X_{2n}$:

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})\cdot X_{2n}.$$

En prenant l'espérance, par indépendance de S_{2n-1} et X_{2n}, et $E(X_{2n}) = 0$:

$$E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) + E(\text{signe}(S_{2n-1}))\cdot E(X_{2n}) = E(|S_{2n-1}|).$$

Q23.

Pour $s = 0$: les deux membres sont nuls. Pour $s \neq 0$, posons $u = |s|t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = |s|\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\text{signe}(s)\cdot u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = |s|\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

L'intégrale standard $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\pi}{2}$ (cas $p = 0$ de Q18, ou par IPP : $= -\left[\dfrac{1-\cos u}{u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\dfrac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\pi}{2}$).

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$.

Q24.

Par Q23, pour tout réel s fixé : $|s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

On applique avec $s = S_n(\omega)$ et on prend l'espérance. Par le théorème de Fubini (l'intégrande $\dfrac{1-\cos(tS_n)}{t^2} \ge 0$) :

$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{E(1-\cos(tS_n))}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q25.

D'après Q18 avec $p = n-1$ (i.e. $2p+1 = 2n-1$) :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos t)^{2n-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$

Donc par Q24 :

$$E(|S_{2n-1}|) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\big((n-1)!\big)^2}.$$

Et par Q22 : $E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) = \dfrac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\big((n-1)!\big)^2}$.