Proposition de Corrigé
Concours Commun Mines-Ponts 2025 – Mathématiques 1
(Filière MP)

Thème : Inégalités de Khintchine.

Inégalité de Hölder

Q1. — Inégalité de Young

Soient $x, y \geq 0$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Cas $x = 0$ ou $y = 0$. L'inégalité $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ est immédiate car les deux membres valent 0 et la somme du membre droit est ≥ 0.

Cas $x, y > 0$. La fonction exp est convexe sur $\mathbf{R}$ (car $(\exp)'' = \exp > 0$). Appliquons l'inégalité de convexité $\exp(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda \exp(a) + (1-\lambda)\exp(b)$ avec $\lambda = \frac{1}{p}$, $1 - \lambda = \frac{1}{q}$, $a = p \ln x > -\infty$ et $b = q \ln y > -\infty$:

$$\exp\left(\frac{p \ln x}{p} + \frac{q \ln y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \exp(p \ln x) + \frac{1}{q} \exp(q \ln y),$$

soit $e^{\ln x + \ln y} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$, c'est-à-dire :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \qquad \square$$

Q2. — Inégalité de Hölder

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}_+$ des variables aléatoires positives.

Cas $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geq 0$ et $Y(\omega) \geq 0$. L'inégalité de Young (Q1) donne :

$$X(\omega)Y(\omega) \leq \frac{X(\omega)^p}{p} + \frac{Y(\omega)^q}{q}.$$

En prenant l'espérance (qui est linéaire et croissante) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \frac{\mathbf{E}(X^p)}{p} + \frac{\mathbf{E}(Y^q)}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \big(\mathbf{E}(X^p)\big)^{1/p}\big(\mathbf{E}(Y^q)\big)^{1/q}.$$

Cas général. Si $\mathbf{E}(X^p) = 0$, alors $X(\omega)^p = 0$ pour tout ω (car Ω est fini et chaque ω a probabilité > 0), donc $X \equiv 0$ et $\mathbf{E}(XY) = 0 \leq \big(\mathbf{E}(X^p)\big)^{1/p}\big(\mathbf{E}(Y^q)\big)^{1/q}$. De même si $\mathbf{E}(Y^q) = 0$. Sinon, posons :

$$X' = \frac{X}{\big(\mathbf{E}(X^p)\big)^{1/p}} \geq 0, \qquad Y' = \frac{Y}{\big(\mathbf{E}(Y^q)\big)^{1/q}} \geq 0.$$

On a $\mathbf{E}(X'^p) = 1$ et $\mathbf{E}(Y'^q) = 1$, donc par le cas précédent $\mathbf{E}(X'Y') \leq 1$, soit :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \big(\mathbf{E}(X^p)\big)^{1/p}\big(\mathbf{E}(Y^q)\big)^{1/q}. \qquad \square$$

Q3. — Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est le cas $p = q = 2$ de Hölder : pour $X, Y \geq 0$,

$$\mathbf{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\,\sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}.$$

Preuve directe (sans utiliser Q2). Pour tout $t \in \mathbf{R}$, la variable $(X - tY)^2$ est positive, donc $\mathbf{E}\big((X - tY)^2\big) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{E}(X^2) - 2t\,\mathbf{E}(XY) + t^2\,\mathbf{E}(Y^2) \geq 0.$$

Si $\mathbf{E}(Y^2) = 0$, alors $Y \equiv 0$ et l'inégalité est triviale. Sinon, ce trinôme en t est de signe constant, donc son discriminant est négatif ou nul :

$$\big(2\,\mathbf{E}(XY)\big)^2 - 4\,\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2) \leq 0,$$

d'où $\mathbf{E}(XY)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2)$, et donc $\mathbf{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2)}$. $\square$

Une inégalité de déviation

Q4. — Inégalité $\cosh(t) \leq e^{t^2/2}$

On compare les développements en série entière, convergents sur $\mathbf{R}$ tout entier :

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \qquad e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k\,k!}.$$

Il suffit de montrer que, pour tout $k \geq 0$, $(2k)! \geq 2^k\,k!$, ce qui donnera terme à terme $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{t^{2k}}{2^k\,k!}$ et donc $\cosh(t) \leq e^{t^2/2}$ (toutes les séries étant à termes positifs pour $t \in \mathbf{R}$).

Preuve de $(2k)! \geq 2^k\,k!$**.** On peut écrire :

$$(2k)! = \underbrace{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}_{\text{facteurs impairs}} \cdot \underbrace{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}_{\text{facteurs pairs}}.$$

Les k facteurs impairs sont tous ≥ 1, et le produit des k facteurs pairs vaut $2^k\,k!$. Donc :

$$(2k)! \geq 1^k \cdot 2^k\,k! = 2^k\,k!. \qquad \square$$

Q5. — Majoration de la fonction génératrice des moments

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables de Rademacher indépendantes ($\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$) et $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$:

Par indépendance des X_i, les variables $e^{tc_iX_i}$ sont indépendantes, donc :

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tc_iX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\big(e^{tc_iX_i}\big).$$

Pour chaque i, par définition de la loi de Rademacher :

$$\mathbf{E}\big(e^{tc_iX_i}\big) = \frac{e^{tc_i} + e^{-tc_i}}{2} = \cosh(tc_i).$$

Par Q4 (appliqué à tc_i à la place de t), $\cosh(tc_i) \leq e^{t^2c_i^2/2}$. Donc :

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{t^2c_i^2/2} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right). \qquad \square$$

Q6. — Inégalité de déviation via Markov

Posons $S = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$. Soit $x > 0$. Puisque $|S| > t$ si et seulement si $e^{x|S|} > e^{xt}$, l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $e^{x|S|}$ donne :

$$\mathbf{P}(|S| > t) = \mathbf{P}\Big(e^{x|S|} > e^{xt}\Big) \leq \frac{\mathbf{E}\big(e^{x|S|}\big)}{e^{xt}}.$$

On majore $\mathbf{E}(e^{x|S|})$. Pour tout ω, $e^{x|S(\omega)|} \leq e^{xS(\omega)} + e^{-xS(\omega)}$ (car $|S| \leq \max(S, -S)$ et $e^{x|\cdot|} = \max(e^{x\cdot}, e^{-x\cdot}) \leq e^{x\cdot} + e^{-x\cdot}$). Par Q5 (appliqué successivement à $t = x$ et à $t = -x$, la majoration étant symétrique) :

$$\mathbf{E}\Big(e^{x|S|}\Big) \leq \mathbf{E}\big(e^{xS}\big) + \mathbf{E}\big(e^{-xS}\big) \leq 2\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

On obtient donc :

$$\mathbf{P}(|S| > t) \leq \frac{2\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum c_i^2\right)}{e^{xt}} = 2\exp\left(\frac{x^2\sum c_i^2}{2} - xt\right). \qquad \square$$

Q7. — Queue sous-gaussienne

D'après Q6, pour tout $x > 0$:

$$\mathbf{P}(|S| > t) \leq 2\exp\big(h(x)\big), \quad \text{où } h(x) = \frac{x^2\sum c_i^2}{2} - xt.$$

Cas $\sum c_i^2 = 0$. Tous les c_i sont nuls, donc $S = 0$ p.s. et $\mathbf{P}(|S| > t) = 0$ pour tout $t > 0$. L'inégalité est triviale.

Cas $\sum c_i^2 > 0$. La fonction h est un polynôme du second degré en x à coefficient dominant $\frac{\sum c_i^2}{2} > 0$. Elle admet un minimum global en $x^* = \frac{t}{\sum c_i^2} > 0$, avec :

$$h(x^*) = \frac{t^2}{2\sum c_i^2} - \frac{t^2}{\sum c_i^2} = -\frac{t^2}{2\sum c_i^2}.$$

En prenant $x = x^*$ dans l'inégalité de Q6 :

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right). \qquad \square$$

Inégalités de Khintchine

Q8. — Formule de la « couche »

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}_+$ positive (et bornée car Ω est fini). Pour tout $p > 0$:

$$\mathbf{E}(X^p) = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbf{P}(X > t)\,dt.$$

Preuve. On applique le théorème de Fubini-Tonelli (justifié car toutes les fonctions sont positives et Ω est fini) :

$$\begin{aligned} p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbf{P}(X>t)\,dt &= p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X>t})\,dt \\ &= \mathbf{E}\Big(p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbf{1}_{t<X}\,dt\Big) \\ &= \mathbf{E}\Big(p\int_0^{X} t^{p-1}\,dt\Big) = \mathbf{E}\Big([t^p]_0^X\Big) = \mathbf{E}(X^p). \qquad \square \end{aligned}$$

(L'intégrale est bien définie car X est bornée, donc $\mathbf{1}_{t<X}=0$ pour t suffisamment grand.)

Q9. — Majoration de $\mathbf{E}(|S|^4)$

Posons $Z = |\sum_{i=1}^n c_iX_i| \geq 0$ et supposons $\sum c_i^2 = 1$.

Calcul préalable de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2/2}\,dt$**.** On effectue le changement de variable $u = t^2/2$ (donc $t=\sqrt{2u}$, $dt = \frac{1}{\sqrt{2u}}\,du$) :

$$\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2/2}\,dt = \int_0^{+\infty} (\sqrt{2u})^3\,e^{-u}\cdot\frac{du}{\sqrt{2u}} = \int_0^{+\infty} (2u)\,e^{-u}\,du = 2\int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,du = 2\,\Gamma(2) = 2.$$

Majoration. Par la formule de Q8 avec $p=4$ et $X=Z$:

$$\mathbf{E}(Z^4) = 4\int_0^{+\infty} t^3\,\mathbf{P}(Z>t)\,dt.$$

Comme $Z=|S|\geq 0$, on a $\mathbf{P}(Z>t) = \mathbf{P}(|S|>t) \leq 2e^{-t^2/2}$ par Q7 (avec $\sum c_i^2 = 1$). Donc :

$$\mathbf{E}(Z^4) \leq 4\int_0^{+\infty} t^3\cdot 2e^{-t^2/2}\,dt = 8\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2/2}\,dt = 8\times 2 = 16. \qquad \square$$

Q10. — Calcul de $\mathbf{E}(S^2)$

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n c_i^2X_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} c_ic_j\,X_iX_j\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2\,\mathbf{E}(X_i^2) + 2\sum_{i<j} c_ic_j\,\mathbf{E}(X_iX_j).$$

— Pour tout i : $\mathbf{E}(X_i^2) = \frac{1}{2}\cdot(+1)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = 1$.

— Pour $i\neq j$: par indépendance, $\mathbf{E}(X_iX_j) = \mathbf{E}(X_i)\,\mathbf{E}(X_j) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

Donc :

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2. \qquad \square$$

Q11. — Borne supérieure (inégalité de Khintchine, côté droit)

Soit $p\geq 1$. On cherche $\beta_p>0$ tel que $(\mathbf{E}(|\sum c_iX_i|^p))^{1/p} \leq \beta_p\left(\sum c_i^2\right)^{1/2}$.

Cas $\sum c_i^2 = 0$. Tous les c_i sont nuls, les deux membres sont nuls.

Cas $\sum c_i^2 > 0$. Posons $c_i' = c_i/\left(\sum c_j^2\right)^{1/2}$, de sorte que $\sum c_i'^2 = 1$, et $Z' = \sum c_i'X_i$.

Par Q8 (formule de la couche, appliquée à $|Z'|$) et Q7 (avec $\sum c_i'^2 = 1$) :

$$\mathbf{E}(|Z'|^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mathbf{P}(|Z'| > t)\, dt \leq 2p \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\, dt =: C_p.$$

Convergence de C_p. Par le changement de variable $u = t^2/2$:

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\, dt = 2^{(p-2)/2} \int_0^{+\infty} u^{p/2-1} e^{-u}\, du = 2^{(p-2)/2}\, \Gamma\big(\tfrac{p}{2}\big) < +\infty,$$

car $p \geq 1$ implique $p/2 > 0$. Donc $C_p = p \cdot 2^{p/2-1} \Gamma(p/2) < +\infty$.

Par homogénéité ($Z = (\sum c_i^2)^{1/2} Z'$) :

$$\mathbf{E}\Big(\Big|\sum c_i X_i\Big|^p\Big) = \Big(\sum c_i^2\Big)^{p/2} \mathbf{E}(|Z'|^p) \leq C_p \left(\sum c_i^2\right)^{p/2}.$$

En posant $\beta_p = C_p^{1/p} = \big(p \cdot 2^{p/2-1} \Gamma(p/2)\big)^{1/p} > 0$:

$$\left(\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)\right)^{1/p} \leq \beta_p \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^{1/2}. \qquad \square$$

Q12. — Borne inférieure pour $p \geq 2$ (Jensen)

Posons $Z = \sum c_i X_i$. La fonction $\varphi : x \mapsto x^{p/2}$ est définie et convexe sur $\mathbf{R}_+$ pour $p \geq 2$ (car $\varphi''(x) = \frac{p}{2}\big(\frac{p}{2} - 1\big) x^{p/2-2} \geq 0$). Par l'inégalité de Jensen appliquée à la variable $Z^2 \geq 0$:

$$\varphi\big(\mathbf{E}(Z^2)\big) \leq \mathbf{E}\big(\varphi(Z^2)\big),$$

soit $\big(\mathbf{E}(Z^2)\big)^{p/2} \leq \mathbf{E}\big((Z^2)^{p/2}\big) = \mathbf{E}(|Z|^p)$. En élevant à la puissance $\frac{1}{p} > 0$:

$$\big(\mathbf{E}(Z^2)\big)^{1/2} \leq (\mathbf{E}(|Z|^p))^{1/p}. \qquad \square$$

Q13. — Calcul de θ

On cherche $\theta \in]0, 1[$ vérifiant $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.

En développant : $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1}{4} - \frac{\theta}{4}$, soit $\frac{1}{4} = \theta\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\Big) = \theta \cdot \frac{4-p}{4p}$. Donc :

$$\theta = \frac{p}{4-p}.$$

Vérifions $\theta \in]0, 1[$ pour $1 \leq p < 2$:

— $\theta > 0$: évident car $p \geq 1 > 0$ et $4 - p \geq 4 - 2 = 2 > 0$.

— $\theta < 1$: $\frac{p}{4-p} < 1 \iff p < 4 - p \iff 2p < 4 \iff p < 2$. ✓

Ainsi $\theta = \frac{p}{4-p} \in]0, 1[$ pour tout $1 \leq p < 2$. $\square$

Q14. — Interpolation par Hölder

Posons $Z = \sum c_i X_i$. On décompose Z^2 comme suit :

$$Z^2 = (Z^p)^{2\theta/p} \cdot (Z^4)^{(1-\theta)/2},$$

où l'on a utilisé $|Z|^{2\theta} = |Z|^{p \cdot 2\theta/p}$ et $|Z|^{2(1-\theta)} = |Z|^{4 \cdot (1-\theta)/2}$. Vérifions l'exposant total de $|Z|$:

$$p \cdot \frac{2\theta}{p} + 4 \cdot \frac{1-\theta}{2} = 2\theta + 2(1-\theta) = 2. \quad ✓$$

On va appliquer l'inégalité de Hölder (Q2) à $U = (|Z|^p)^{2\theta/p}$ et $V = (|Z|^4)^{(1-\theta)/2}$ avec les exposants conjugués :

$$r = \frac{p}{2\theta}, \quad s = \frac{2}{1-\theta}.$$

Vérifions $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{2\theta}{p} + \frac{1-\theta}{2}$. Par Q13, $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} = \frac{1}{2}$, donc en multipliant par 2 : $\frac{2\theta}{p} + \frac{1-\theta}{2} = 1$. Les exposants r et s sont bien conjugués.

On a $U^r = (|Z|^p)^{2\theta/p \cdot p/(2\theta)} = |Z|^p$ et $V^s = (|Z|^4)^{(1-\theta)/2 \cdot 2/(1-\theta)} = |Z|^4$. Donc par Hölder :

$$\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(UV) \leq (\mathbf{E}(U^r))^{1/r} \, (\mathbf{E}(V^s))^{1/s} = (\mathbf{E}(|Z|^p))^{2\theta/p} \left(\mathbf{E}(Z^4)\right)^{(1-\theta)/2}. \qquad \square$$

Q15. — Borne inférieure pour $1 \leq p < 2$

Étape 1 : majoration de $\mathbf{E}(Z^4)$ par $\mathbf{E}(Z^2)^2$. D'après Q11 appliqué avec $p = 4$:

$$\mathbf{E}(Z^4) \leq \beta_4^4 \left(\sum c_i^2\right)^2.$$

Par Q10, $\sum c_i^2 = \mathbf{E}(Z^2)$, donc :

$$\mathbf{E}(Z^4) \leq \beta_4^4 \, \mathbf{E}(Z^2)^2.$$

Étape 2 : substitution dans Q14.

$$\mathbf{E}(Z^2) \leq (\mathbf{E}(|Z|^p))^{2\theta/p} \cdot \left(\beta_4^4 \, \mathbf{E}(Z^2)^2\right)^{(1-\theta)/2} = \beta_4^{2(1-\theta)} \, \mathbf{E}(Z^2)^{1-\theta} \cdot (\mathbf{E}(|Z|^p))^{2\theta/p}.$$

Étape 3 : isolation de $\mathbf{E}(Z^2)$. Si $\mathbf{E}(Z^2) = 0$, alors $Z = 0$ p.s. (car Ω fini) et la borne inférieure $\alpha_p \cdot 0 \leq 0$ est triviale. Sinon, $\mathbf{E}(Z^2) > 0$ et on divise par $\mathbf{E}(Z^2)^{1-\theta} > 0$:

$$\mathbf{E}(Z^2)^{\theta} \leq \beta_4^{2(1-\theta)} \, (\mathbf{E}(|Z|^p))^{2\theta/p}.$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{2\theta} > 0$:

$$\mathbf{E}(Z^2)^{1/2} \leq \beta_4^{(1-\theta)/\theta} \, (\mathbf{E}(|Z|^p))^{1/p}.$$

On pose $\alpha_p = \beta_4^{-(1-\theta)/\theta} > 0$ (avec $\theta = p/(4-p)$, soit $(1-\theta)/\theta = (4-2p)/p$) :

$$\alpha_p \, \mathbf{E}(Z^2)^{1/2} \leq (\mathbf{E}(|Z|^p))^{1/p}, \quad \text{où } \alpha_p = \beta_4^{-(4-2p)/p} > 0. \qquad \square$$

Q16. — Inégalités de Khintchine : bilan

Pour tout $p \geq 1$ et tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$, posons $S = \sum_{i=1}^n c_i X_i$:

- **Borne supérieure (tous $p \geq 1$)** : Q11 donne $\left(\mathbf{E}(|S|^p)\right)^{1/p} \leq \beta_p \, \mathbf{E}(S^2)^{1/2}$ avec $\beta_p = \left(p \cdot 2^{p/2-1}\Gamma(p/2)\right)^{1/p} > 0$.
- **Borne inférieure pour** $p \geq 2$: Q12 (Jensen) donne $\mathbf{E}(S^2)^{1/2} \leq \left(\mathbf{E}(|S|^p)\right)^{1/p}$, soit $\alpha_p = 1$.
- **Borne inférieure pour** $1 \leq p < 2$: Q15 donne $\alpha_p \, \mathbf{E}(S^2)^{1/2} \leq \left(\mathbf{E}(|S|^p)\right)^{1/p}$ avec $\alpha_p = \beta_4^{-(4-2p)/p} > 0$.

On vérifie $\alpha_p \leq \beta_p$: en appliquant les deux inégalités à $S = X_1$ (donc $\sum c_i^2 = 1$, $\mathbf{E}(S^2)^{1/2} = 1$, $\mathbf{E}(|S|^p)^{1/p} = 1$), on obtient $\alpha_p \leq 1 \leq \beta_p$.

En conclusion, pour tout $p \geq 1$, il existe $0 < \alpha_p \leq \beta_p$ tels que :

$$\alpha_p \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^{1/2} \leq \left(\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)\right)^{1/p} \leq \beta_p \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^{1/2}. \qquad \square$$

Une première conséquence

Q17. — Produit scalaire sur $L^2(\Omega)$

Ω est fini ; notons $L^2(\Omega)$ l'espace des variables aléatoires réelles sur Ω (toutes sont bornées). Posons $\varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$.

- *Bilinéarité* : par linéarité de l'espérance, $\varphi(aX+bX',Y) = a\,\mathbf{E}(XY)+b\,\mathbf{E}(X'Y)$. De même en le second argument.
- *Symétrie* : $\varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(YX) = \varphi(Y,X)$.
- *Positivité* : $\varphi(X,X) = \mathbf{E}(X^2) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\{\omega\})\,X(\omega)^2 \geq 0$.
- *Définition positive* : si $\mathbf{E}(X^2) = 0$, alors pour tout $\omega \in \Omega$, le terme $\mathbf{P}(\{\omega\})\,X(\omega)^2$ est positif et leur somme est nulle ; or $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ (probabilité d'un singleton dans un espace fini), donc $X(\omega)^2 = 0$, soit $X(\omega) = 0$ pour tout ω, i.e. $X \equiv 0$.

φ est donc un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, de norme associée $\|X\|_2 = \mathbf{E}(X^2)^{1/2}$. $\square$

Q18. — ψ est une isométrie

Pour $u = (u_i)_{i\geq 0} \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ (suite à support fini), posons $\psi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i \in L^2(\Omega)$ (somme finie).

La linéarité de ψ est immédiate par linéarité de l'espérance.

Pour $u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, les sommes $\psi(u)$ et $\psi(v)$ étant finies, on peut développer :

$$\varphi(\psi(u),\psi(v)) = \mathbf{E}\left(\sum_i u_i X_i \cdot \sum_j v_j X_j\right) = \sum_{i,j} u_i v_j\,\mathbf{E}(X_i X_j).$$

Or, les variables de Rademacher $(X_i)_{i\geq 0}$ sont indépendantes et centrées :

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \begin{cases} \mathbf{E}(X_i^2) = 1 & \text{si } i = j, \\ \mathbf{E}(X_i)\,\mathbf{E}(X_j) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Donc $\varphi(\psi(u),\psi(v)) = \sum_i u_i v_i = \langle u, v\rangle_{\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}}$. En particulier :

$$\|\psi(u)\|_2^2 = \varphi(\psi(u),\psi(u)) = \|u\|_{\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}}^2\,,$$

ce qui montre que ψ est une isométrie (linéaire) de $(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dans $(L^2(\Omega),\varphi)$. $\square$

Q19. — Équivalence de toutes les normes L^p sur R

Notons $R = \psi(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}) \subset L^2(\Omega)$. Soit $Z \in R$: il existe $u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ tel que $Z = \psi(u) = \sum_i u_i X_i$.

Par Q18 : $\|Z\|_2 = \|u\|_{\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}} = \left(\sum_i u_i^2\right)^{1/2}$.

Les inégalités de Khintchine (Q16) avec $c_i = u_i$ donnent, pour tout $p \geq 1$:

$$\alpha_p\,\|Z\|_2 \leq \|Z\|_p \leq \beta_p\,\|Z\|_2\,.$$

Soient $p, q \geq 1$. Combinant les deux inégalités :

$$\|Z\|_p \leq \beta_p\,\|Z\|_2 \leq \frac{\beta_p}{\alpha_q}\,\|Z\|_q\,,$$

$$\|Z\|_p \geq \alpha_p\,\|Z\|_2 \geq \frac{\alpha_p}{\beta_q}\,\|Z\|_q\,.$$

Donc, avec les constantes $A_{p,q} = \alpha_p/\beta_q > 0$ et $B_{p,q} = \beta_p/\alpha_q > 0$ (indépendantes de Z et de n) :

$$A_{p,q}\,\|Z\|_q \leq \|Z\|_p \leq B_{p,q}\,\|Z\|_q \quad \forall Z \in R. \qquad \square$$

Une deuxième conséquence

Q20. — Application à la loi uniforme sur $\{-1,1\}^k$

Posons $n = 2^k$. Soit $\Omega = \{-1,1\}^k$ muni de la probabilité uniforme $\mathbf{P}(\{\varepsilon\}) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n}$.
Pour $i \in \{1,\dots,k\}$, définissons $X_i : \Omega \to \{-1,1\}$ par $X_i(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) = \varepsilon_i$.
Les X_i sont des variables de Rademacher indépendantes.

— $\mathbf{P}(X_i = 1) = |\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) : \varepsilon_i = +1\}|/n = 2^{k-1}/2^k = 1/2$. De même $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2$.
— Indépendance : pour tout $(a_1,\dots,a_k) \in \{-1,1\}^k$, $\mathbf{P}(X_1 = a_1,\dots,X_k = a_k) = 1/n = \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(X_i = a_i)$.

Posons $Z = \sum_{i=1}^k a_i X_i$. Par Q10 : $\|Z\|_2^2 = \mathbf{E}(Z^2) = \sum_{i=1}^k a_i^2 = \|a\|_{\mathbf{R}^k}^2$.
On calcule directement :

$$\|Z\|_1 = \mathbf{E}(|Z|) = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right|.$$

Par les inégalités de Khintchine (Q16) avec $p = 1$:

$$\alpha_1 \|Z\|_2 \le \|Z\|_1 \le \beta_1 \|Z\|_2 .$$

En multipliant par n et en substituant $\|Z\|_1 = \frac{1}{n}\sum_\varepsilon |\sum_i a_i\varepsilon_i|$ et $\|Z\|_2 = \|a\|_{\mathbf{R}^k}$:

$$\alpha_1\, n\, \|a\|_{\mathbf{R}^k} \le \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right| \le \beta_1\, n\, \|a\|_{\mathbf{R}^k} . \qquad \square$$

Q21. — Sous-espace de $\mathbf{R}^n$ à normes ℓ^1 et ℓ^2 équivalentes

Reprenons $n = 2^k$. Ordonnons les éléments de $\{-1,1\}^k$ en $(\varepsilon^{(1)},\dots,\varepsilon^{(n)})$ (ordre quelconque mais fixé). Définissons l'application linéaire $T : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ par :

$$T(a) = \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i^{(j)}\right)_{j=1}^n .$$

Injectivité de T. Supposons $T(a) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i = 0$ pour tout $\varepsilon \in \{-1,1\}^k$. Fixons $l \in \{1,\dots,k\}$ et calculons :

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_l \cdot \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^k a_i \underbrace{\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_l\varepsilon_i}_{=:M_{li}} = 0.$$

On calcule M_{li} : pour $i \neq l$, $\sum_\varepsilon \varepsilon_l\varepsilon_i = \left(\sum_{\varepsilon_l\in\{-1,1\}}\varepsilon_l\right)\left(\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\}}\varepsilon_i\right)\cdot 2^{k-2} = 0$. Pour $i = l$, $\sum_\varepsilon \varepsilon_l^2 = n$. Donc $n\cdot a_l = 0$, soit $a_l = 0$. Ceci étant valable pour tout l, on conclut $a = 0$.
Ainsi T est injective, et $F = T(\mathbf{R}^k)$ est un **sous-espace de dimension k de $\mathbf{R}^n$**.
Calcul des normes de $x = T(a)$.

$$\|x\|_1^{\mathbf{R}^n} = \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i^{(j)}\right| = \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right|.$$

$$\|x\|_2^{\mathbf{R}^n} = \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i^{(j)}\right)^2\right)^{1/2} = \left(n\cdot\frac{1}{n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^k}\left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right)^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\,\mathbf{E}(Z^2)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|a\|_{\mathbf{R}^k} ,$$

où l'on a utilisé Q10 pour $\mathbf{E}(Z^2) = \sum a_i^2 = \|a\|_{\mathbf{R}^k}^2$. On obtient donc :

$$\|a\|_{\mathbf{R}^k} = \frac{\|x\|_2^{\mathbf{R}^n}}{\sqrt{n}}.$$

Application de Q20. En substituant dans les inégalités de Q20 :

$$\alpha_1 \, n \cdot \frac{\|x\|_2^{\mathbf{R}^n}}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \, n \cdot \frac{\|x\|_2^{\mathbf{R}^n}}{\sqrt{n}},$$

soit, pour tout $x \in F$:

$$\alpha_1 \sqrt{n} \, \|x\|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \, \|x\|_2^{\mathbf{R}^n}. \qquad \square$$