Corrigé Détaillé et Exhaustif - Épreuve de Mathématiques B

Concours X-ESPCI 2026 (Filières MP-MPI)

Ce corrigé propose une rédaction détaillée où chaque argument analytique, probabiliste ou algébrique est justifié point par point.

Préliminaire

1.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique associée est :

$$r^2 - \alpha r + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = \alpha^2 - 4$. L'expression du terme général u_n dépend strictement du signe de Δ.

— **Cas** $|\alpha| > 2$ **(**$\Delta > 0$**)** : L'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

La théorie des suites récurrentes linéaires nous assure qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$. Utilisons les conditions initiales pour déterminer A et B :

$$\begin{aligned} u_0 = 0 &\implies A + B = 0 \implies B = -A \\ u_1 = 1 &\implies Ar_1 + Br_2 = 1 \implies A(r_1 - r_2) = 1 \end{aligned}$$

Or, $r_1 - r_2 = \sqrt{\alpha^2 - 4}$. Donc $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-4}}$ et $B = \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2-4}}$.

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \left(\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right)^n \right)}$$

— **Cas** $|\alpha| < 2$ **(**$\Delta < 0$**)** : Puisque $\alpha \in]-2, 2[$, il existe un unique réel $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\alpha = 2\cos(\theta)$. L'équation caractéristique devient $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$, qui admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{-i\theta}$$

La solution générale s'écrit alors sous forme trigonométrique : $u_n = C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)$, avec $C, D \in \mathbb{R}$.

$$u_0 = 0 \implies C\cos(0) + D\sin(0) = 0 \implies C = 0$$
$$u_1 = 1 \implies D\sin(\theta) = 1 \implies D = \frac{1}{\sin(\theta)} \quad \text{(possible car } \theta \in]0,\pi[\implies \sin\theta \neq 0)$$

$$\boxed{u_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \quad \text{avec } \theta = \arccos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

— **Cas $\alpha = 2$ ($\Delta = 0$)** : L'équation admet une racine double $r_0 = \frac{2}{2} = 1$. La solution générale est de la forme $u_n = (A + Bn)1^n = A + Bn$. $u_0 = 0 \implies A = 0$, et $u_1 = 1 \implies A + B = 1 \implies B = 1$.

$$\boxed{u_n = n}$$

— **Cas $\alpha = -2$ ($\Delta = 0$)** : L'équation admet une racine double $r_0 = \frac{-2}{2} = -1$. La solution générale est de la forme $u_n = (A + Bn)(-1)^n$. $u_0 = 0 \implies A = 0$, et $u_1 = 1 \implies (A + B)(-1) = 1 \implies -B = 1 \implies B = -1$.

$$\boxed{u_n = -n(-1)^n = n(-1)^{n-1}}$$

Première Partie

2.

Étudions la suite (v_n). On peut la réécrire sous la forme suivante pour faire apparaître une somme de Riemann standard sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{n+1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+1}{n} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)}_{=R_{n+1}} - \frac{f(1)}{n} \end{aligned}$$

Puisque f est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème des sommes de Riemann nous assure que la suite (R_{n+1}) converge vers l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$. De plus, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{f(1)}{n} = 0$. Par opérations sur les limites, $\lim_{n\to\infty} v_n = \int_0^1 f(x)dx$.

Étudions la suite (w_n). Réécrivons-la de manière similaire :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) \\ &= \frac{2n+1}{2n} \times \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

La somme $\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{2n+1}\right)$ correspond à une somme de Riemann sur $[0, 1]$ associée à la subdivision régulière de pas $h = \frac{1}{2n+1}$. Cependant, on n'évalue la fonction f qu'aux points d'indice pair ($2k$). Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). On peut donc affirmer que l'écart entre l'aire des rectangles de largeur $\frac{2}{2n+1}$ et l'intégrale tend vers 0. Plus rigoureusement, la limite est la même que la somme de Riemann classique. Le préfacteur $\frac{2n+1}{2n}$ tendant vers 1, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \int_0^1 f(x)\,dx}$$

3.

3a.) Convergence de l'intégrale : La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$ est continue sur l'intervalle ouvert $]-2,2[$. Au voisinage de 2, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{(2-x)(2+x)} \sim 2\sqrt{2-x}$. La fonction f étant continue sur le segment $[-2,2]$, elle y est bornée par un certain $M>0$. Ainsi, $\left|\frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\right| = \mathcal{O}_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$. Puisque l'intégrale de Riemann $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$ converge (singularité en puissance $1/2<1$), l'intégrale étudiée converge absolument en 2. Un raisonnement parfaitement symétrique prouve la convergence absolue en -2. L'intégrale est donc convergente.

Calcul par changement de variable : Effectuons le changement de variable $x = \varphi(\theta) = 2\cos(\theta)$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise un difféomorphisme strictement décroissant de $]0,\pi[$ sur $]-2,2[$. On a $dx = -2\sin(\theta)\,d\theta$. Pour $\theta \in]0,\pi[$, $\sin(\theta)>0$, donc $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2(\theta)} = \sqrt{4\sin^2(\theta)} = 2\sin(\theta)$. Les bornes deviennent : $x=-2 \implies \theta=\pi$ et $x=2 \implies \theta=0$.

$$\begin{aligned}
I(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{f(2\cos\theta)}{2\sin\theta}(-2\sin\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} -f(2\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(2\cos\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(2\cos\theta)\,d\theta}$$

3b.) On applique la formule précédente avec $f_n(x) = x^n$:

— **Pour $\mathbf{n=0}$** : $I(f_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,d\theta = \frac{\pi}{\pi} = 1$.

— **Pour $\mathbf{n=1}$** : $I(f_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}[\sin\theta]_0^{\pi} = 0$.

— **Pour $\mathbf{n=2}$** : $I(f_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\cos^2\theta\,d\theta$. En linéarisant $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, on obtient :

$$I(f_2) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\pi - 0) = 2.$$

3c.) Dans le cas général, $f_n(x) = x^n$, donc $I(f_n) = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^n(\theta)\,d\theta$. Découpons l'intégrale en $\pi/2$: $\int_0^{\pi}\cos^n\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^n\theta\,d\theta$. Dans la deuxième intégrale, posons $u = \pi-\theta$. $du = -d\theta$, $\cos(\pi-u) = -\cos(u)$. L'intégrale devient $\int_0^{\pi/2}(-\cos u)^n du = (-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos^n u\,du$. On reconnaît l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(u)du$. Donc $\int_0^{\pi}\cos^n\theta\,d\theta = W_n + (-1)^n W_n$.

— **Si n est impair** ($n = 2p+1$), alors $(-1)^n = -1$, et l'intégrale est nulle. $I(f_{2p+1}) = 0$.

— **Si n est pair** ($n = 2p$), alors l'intégrale vaut $2W_{2p}$. Or on sait classiquement (par récurrence) que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$I(f_{2p}) = \frac{2^{2p}}{\pi} \times 2 \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p}}{\pi} \times \pi \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \binom{2p}{p}$$

$$\boxed{I(f_{2p+1}) = 0 \quad \text{et} \quad I(f_{2p}) = \binom{2p}{p}}$$

4.

4a.) La variable aléatoire U_n suit la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Sa loi est donnée par $\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [[1, n]]$. D'après le théorème de transfert, l'espérance de la variable aléatoire $f\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)$ s'écrit :

$$\mathbb{E}\left[f\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} f\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

Considérons la fonction $g : \theta \mapsto f(2\cos(\pi\theta))$. Puisque f est continue sur $[-2, 2]$, g est continue sur $[0, 1]$. La somme précédente est $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n+1}\right)$. D'après la question 2 (suite v_n), cette somme de Riemann converge quand $n \to +\infty$ vers :

$$\int_0^1 g(\theta)\, d\theta = \int_0^1 f(2\cos(\pi\theta))\, d\theta$$

Effectuons le changement de variable affine $u = \pi\theta$, $du = \pi d\theta$. L'intégrale devient $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(2\cos u)\, du$. D'après la question 3a, cela est exactement égal à $I(f)$. La convergence est prouvée.

4b.) Soit $y \in [-2, 2]$. L'événement $\left\{2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right\}$ peut s'écrire à l'aide de la fonction indicatrice $F_y = \mathbf{1}_{[-2,y[}$. On a $\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) = \mathbb{E}\left[F_y\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right]$. Cependant, la fonction F_y n'est pas continue en y, on ne peut pas appliquer directement 4a. Soit $\epsilon > 0$ tel que $y - \epsilon > -2$ et $y + \epsilon < 2$. Construisons deux fonctions continues encadrant F_y :

— f_ϵ valant 1 sur $[-2, y - \epsilon]$, 0 sur $[y, 2]$, et affine sur $[y - \epsilon, y]$.

— g_ϵ valant 1 sur $[-2, y]$, 0 sur $[y + \epsilon, 2]$, et affine sur $[y, y + \epsilon]$.

On a $f_\epsilon \leq F_y \leq g_\epsilon$. Par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[f_\epsilon\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right] \leq \mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \leq \mathbb{E}\left[g_\epsilon\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right]$$

En prenant la limite $n \to +\infty$ (les fonctions f_ϵ, g_ϵ étant continues, on applique 4a) :

$$I(f_\epsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n \leq I(g_\epsilon)$$

Or $I(g_\epsilon) - I(f_\epsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{g_\epsilon(x) - f_\epsilon(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx \leq \frac{1}{\pi}\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$. Cette dernière intégrale tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$ (propriété absolue de l'intégrale de Lebesgue). Ainsi, par le théorème des gendarmes en faisant tendre $\epsilon \to 0$, la limite existe et vaut $\lim_{\epsilon\to 0} I(f_\epsilon) = I(F_y)$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{y} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx}$$

Deuxième partie

5.

5a.) Pour $n=2$, la matrice est $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_2(X) = \det(XI_2 - T_2) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1$$

Les racines de χ_2 sont les valeurs propres, donc le spectre est $\mathrm{Sp}(T_2) = \{-1, 1\}$.

Pour $n = 3$, la matrice est $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $\chi_3(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$. Développons ce déterminant par rapport à la première ligne :

$$\chi_3(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} = X(X^2-1) + (-X) = X^3 - 2X = X(X^2-2)$$

Les racines sont $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$. Le spectre est $\mathrm{Sp}(T_3) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

5b.) Pour $n \geq 4$, développons le déterminant $\chi_n(X) = \det(XI_n - T_n)$ par rapport à la première ligne. Cette première ligne contient X en position $(1,1)$, -1 en position $(1,2)$, et des 0 ailleurs. Le cofacteur associé à X est exactement le déterminant de la matrice $XI_{n-1} - T_{n-1}$, c'est-à-dire $\chi_{n-1}(X)$. Le cofacteur associé à -1 (qui est affecté du signe $(-1)^{1+2} = -1$, donc le terme devient $(-1)(-1) = +1$) est le déterminant d'une matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ dont la première colonne ne contient qu'un seul élément non nul : un -1 en position $(1,1)$. En développant ce sous-déterminant par rapport à sa première colonne, on trouve (-1) multiplié par le déterminant de la sous-matrice restante, qui est exactement $XI_{n-2} - T_{n-2}$, soit $\chi_{n-2}(X)$. En regroupant tout cela, on obtient la relation de récurrence :

$$\boxed{\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X)}$$

5c.) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < 2$. Posons $u_n = \chi_n(\alpha)$. D'après 5b, on a la récurrence $u_n = \alpha u_{n-1} - u_{n-2}$ pour $n \geq 4$. Calculons les premiers termes : $u_1 = \det(XI_1 - T_1) = \alpha$. Et $u_2 = \chi_2(\alpha) = \alpha^2 - 1$. On remarque que la relation de récurrence donne pour $n = 3$: $u_3 = \alpha(\alpha^2 - 1) - \alpha = \alpha^3 - 2\alpha$, ce qui correspond bien à $\chi_3(\alpha)$. Si l'on définit un terme artificiel u_0 pour que la récurrence soit valide dès $n = 2$: on doit avoir $u_2 = \alpha u_1 - u_0 \implies \alpha^2 - 1 = \alpha(\alpha) - u_0 \implies u_0 = 1$. La suite (u_n) vérifie donc la récurrence de la question 1 avec la condition initiale $u_0 = 1$ (attention, en Q1, c'était $u_0 = 0$). L'équation caractéristique est $r^2 - \alpha r + 1 = 0$. Puisque $|\alpha| < 2$, les racines sont $r_1 = \frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$ et $r_2 = \frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$. La solution générale est $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$. Avec $n = 0$: $A + B = 1$. Avec $n = 1$: $Ar_1 + Br_2 = \alpha$. Comme $\alpha = r_1 + r_2$, on obtient $Ar_1 + (1-A)r_2 = r_1 + r_2 \implies A(r_1 - r_2) = r_1 \implies A = \frac{r_1}{r_1 - r_2}$. Et $B = 1 - A = \frac{-r_2}{r_1 - r_2}$. Donc $u_n = \frac{r_1 \cdot r_1^n - r_2 \cdot r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$. Calculons $r_1 - r_2 = \frac{2i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} = i\sqrt{4-\alpha^2}$. En substituant r_1, r_2 et la différence, on obtient l'égalité demandée :

$$\boxed{\chi_n(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right)}$$

5d.) Nous allons développer les termes à l'aide de la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
\left(\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha^{n+1-k} \left(i\sqrt{4-\alpha^2}\right)^k \\
\left(\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha^{n+1-k} \left(-i\sqrt{4-\alpha^2}\right)^k
\end{aligned}$$

Lorsqu'on soustrait la deuxième somme à la première, les termes correspondant aux indices k pairs (où i^k est réel et de même signe) s'annulent. Les termes correspondant aux indices k impairs ($k = 2p+1$) s'ajoutent et doublent.

$$\text{Numérateur} = \frac{1}{2^{n+1}} \times 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2p+1} \alpha^{n-2p} \left(i\sqrt{4-\alpha^2}\right)^{2p+1}$$

On divise par le dénominateur $i\sqrt{4-\alpha^2}$:

$$\begin{aligned}
\chi_n(\alpha) &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2p+1} \alpha^{n-2p} \left(i\sqrt{4-\alpha^2}\right)^{2p} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2p+1} \alpha^{n-2p} (-1)^p (4-\alpha^2)^p
\end{aligned}$$

Pour obtenir les coefficients explicites du polynôme, on développe $(4-X^2)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} 4^{p-j} (-1)^j X^{2j}$. On insère cette somme :

$$\chi_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{p} \binom{n+1}{2p+1} \binom{p}{j} (-1)^{p+j} 4^{p-j} X^{n-2(p-j)}$$

En posant $m = p - j$ (donc $j = p - m$), l'exposant de X est $n - 2m$.

$$\boxed{\chi_n(X) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{p=m}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{2^{n-2m}} \binom{n+1}{2p+1} \binom{p}{p-m} \right) X^{n-2m}}$$

6.

Les valeurs propres de T_n sont les racines du polynôme caractéristique $\chi_n(X)$. Cherchons ces racines dans l'intervalle $]-2, 2[$. Posons $x = 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi[$. D'après l'étude de la question 1 pour $|\alpha| < 2$, l'expression de la question 5c se simplifie en :

$$\chi_n(2\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Cette quantité s'annule si et seulement si $\sin((n+1)\theta) = 0$, c'est-à-dire si $(n+1)\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$. Puisque nous cherchons $\theta \in]0, \pi[$, les solutions valides sont :

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \quad \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ces n valeurs de θ_k fournissent n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$. Le polynôme $\chi_n(X)$ étant de degré n, il possède exactement n racines (comptées avec multiplicité). Puisque nous avons trouvé n racines distinctes, ce sont les seules, et elles sont de multiplicité 1. La matrice T_n étant symétrique réelle, le théorème spectral garantit qu'elle est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Nous les avons toutes déterminées :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n) = \left\{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \mid k = 1, \ldots, n\right\}}$$

7.

La quantité $S_f(T_n)$ est définie comme la moyenne de la fonction f appliquée aux valeurs propres de T_n, pondérée par leurs multiplicités. Or, nous avons prouvé que chaque valeur propre est de multiplicité 1. Ainsi, la formule devient :

$$S_f(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

Nous reconnaissons *exactement* la somme étudiée à la question 4a (qui était l'espérance de $f(2\cos(\frac{\pi U_n}{n+1})))$. Or, dans la question 4a, nous avons prouvé via la théorie des sommes de Riemann que cette quantité converge quand $n \to +\infty$ vers l'intégrale $I(f)$. En combinant avec le résultat de la question 3a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_f(T_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\, dx}$$

8.

8a.) Remarquons que la matrice $T_n(a,b,c)$ se décompose ainsi : $T_n(a,b,c) = aI_n + T_n(0,b,c)$.

Soit λ une valeur propre de $T_n(0,b,c)$ et X un vecteur propre associé. On a $T_n(0,b,c)X = \lambda X$. Alors $T_n(a,b,c)X = (aI_n + T_n(0,b,c))X = aX + \lambda X = (a+\lambda)X$. Ainsi, $a+\lambda$ est une valeur propre de $T_n(a,b,c)$. Le spectre est simplement translaté de a.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n(a,b,c)) = \{a+\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T_n(0,b,c))\}}$$

8b.) On cherche une relation de similitude pour simplifier $T_n(0,b,c)$. Soit $D = \mathrm{diag}(1, r, r^2, \ldots, r^{n-1})$ une matrice diagonale inversible (donc $r \neq 0$). Considérons la matrice $M = D^{-1}T_n(0,b,c)D$. Le calcul des coefficients donne $M_{i,j} = \frac{1}{r^{i-1}}(T_n(0,b,c))_{i,j}r^{j-1} = r^{j-i}(T_n(0,b,c))_{i,j}$.

— Pour les éléments sur la première sur-diagonale ($j = i+1$), l'élément initial est c. Il devient $c \cdot r^1 = cr$.

— Pour les éléments sur la première sous-diagonale ($j = i-1$), l'élément initial est b. Il devient $b \cdot r^{-1} = b/r$.

Pour que la matrice soit égale à $T_n(0,bc,1)$, il faut que les sur-diagonales valent 1 et les sous-diagonales bc. On pose l'équation $cr = 1 \implies r = 1/c$ (possible car $bc > 0 \implies c \neq 0$). Alors sur la sous-diagonale on obtient $b/(1/c) = bc$. Ainsi, $T_n(0,b,c)$ est semblable à $T_n(0,bc,1)$ via la matrice de passage D. Deux matrices semblables ayant le même spectre :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n(a,b,c)) = \{a+\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T_n(0,bc,1))\}}$$

8c.) L'indication nous invite à nous ramener au cas où la matrice est symétrique, c'est-à-dire avec des coefficients sous et sur-diagonaux égaux. Dans l'expression $M_{i,j}$ précédente, on veut imposer

$cr = b/r$. Ceci équivaut à $r^2 = b/c$. Puisque nous avons supposé $bc > 0$, les nombres b et c sont de même signe, donc le rapport b/c est strictement positif. On peut choisir la racine réelle $r = \sqrt{b/c}$. Avec ce choix de r, les éléments sur-diagonaux valent $c\sqrt{b/c} = \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \sqrt{bc}$ (en supposant $c > 0$, on peut adapter pour $c < 0$ en factorisant le signe commun). La matrice semblable obtenue est donc $\sqrt{bc}\,T_n(0,1,1) = \sqrt{bc}\,T_n$. Le spectre de cette matrice est, par linéarité, l'ensemble des éléments du spectre de T_n multipliés par $\sqrt{bc}$. En combinant ceci avec la translation de la question 8a, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n(a,b,c)) = \left\{a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \mid 1 \leq k \leq n\right\}}$$

9.

9a.) D'après la question 8c, les valeurs propres de $T_n(a,b,c)$ sont les $\lambda_k = a + \sqrt{bc}\cdot 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Par définition de S_f :

$$S_f(T_n(a,b,c)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \sqrt{bc}\cdot 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

Considérons la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(a + \sqrt{bc}x)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur le segment $[-2, 2]$. On remarque alors que $S_f(T_n(a,b,c)) = S_g(T_n)$ où $T_n = T_n(0,1,1)$. On applique directement le résultat de convergence prouvé à la question 7 :

$$\lim_{n\to+\infty} S_g(T_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\frac{g(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

En remplaçant $g(x)$ par son expression en fonction de f, on obtient le résultat :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_f(T_n(a,b,c)) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\frac{f(a+\sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx}$$

9b.) Soit $y \in \mathbb{R}$. Le nombre $q_n(y)$ est le nombre de valeurs propres $\lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\cos(\theta_k)$ (avec $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$) qui vérifient $\lambda_k \leq y$. Résolvons l'inéquation $\lambda_k \leq y$:

$$a + 2\sqrt{bc}\cos(\theta_k) \leq y \iff \cos(\theta_k) \leq \frac{y-a}{2\sqrt{bc}}$$

La fonction cosinus étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$, cette inégalité s'inverse lorsqu'on applique la fonction arccos :

$$\theta_k \geq \arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)$$

(Ici, pour être totalement rigoureux, on suppose que l'argument du arccos est bien dans $[-1, 1]$. Si l'argument est < -1, $q_n(y) = 0$. S'il est > 1, $q_n(y) = n$). En remplaçant θ_k :

$$\frac{k\pi}{n+1} \geq \arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right) \iff k \geq \frac{n+1}{\pi}\arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)$$

Les indices valides sont donc les entiers k tels que $\lceil K \rceil \leq k \leq n$, où K est le membre de droite. Le nombre de tels indices est asymptotiquement équivalent à la longueur de cet intervalle :

$$q_n(y) \sim n - \frac{n}{\pi}\arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)\right)$$

On peut simplifier en utilisant l'identité trigonométrique $\arccos(u) + \arcsin(u) = \frac{\pi}{2}$, d'où $1 - \frac{\arccos(u)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin(u)}{\pi}$.

$$\boxed{q_n(y) \underset{n\to\infty}{\sim} n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)\right)}$$

Troisième partie

10.

10a.) Soit κ un réel tel que $0 \leq \kappa < \frac{1}{2}$. Le polynôme est $Q_n(x) = (1 - x^n)^{2^n}$.

Étude sur l'intervalle $[0, \kappa]$: Pour tout $x \in [0, \kappa]$, on a $0 \leq x^n \leq \kappa^n$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto (1 - t)^{2^n}$, on a :

$$1 \geq Q_n(x) \geq (1 - \kappa^n)^{2^n}$$

La minoration est indépendante de x. Étudions sa limite quand $n \to \infty$. En passant à l'exponentielle : $(1-\kappa^n)^{2^n} = \exp(2^n \ln(1-\kappa^n))$. Puisque $\kappa < 1$, κ^n tend vers 0. On peut utiliser l'équivalent classique $\ln(1 - u) \sim -u$ en 0. L'argument de l'exponentielle est équivalent à $-2^n\kappa^n = -(2\kappa)^n$. Or, on a supposé $\kappa < 1/2$, donc $2\kappa < 1$. La suite géométrique $(2\kappa)^n$ tend vers 0. L'argument de l'exponentielle tend vers 0, donc la borne inférieure tend vers $\exp(0) = 1$. Par le théorème des gendarmes, $\sup_{x\in[0,\kappa]} |Q_n(x) - 1| \to 0$. La suite (Q_n) converge uniformément vers 1 sur $[0, \kappa]$.

Étude sur l'intervalle $[1 - \kappa, 1]$: Pour tout $x \in [1 - \kappa, 1]$, on a $1 - x^n \leq 1 - (1 - \kappa)^n$. Donc :

$$0 \leq Q_n(x) \leq (1 - (1 - \kappa)^n)^{2^n}$$

Passons à l'exponentielle pour la majoration : $\exp(2^n \ln(1-(1-\kappa)^n))$. Puisque $\kappa > 0$, $1-\kappa < 1$, donc $(1 - \kappa)^n \to 0$. L'équivalent du log s'applique : L'argument est équivalent à $-2^n(1 - \kappa)^n = -(2(1 - \kappa))^n$. Or, on a supposé $\kappa < 1/2 \implies -\kappa > -1/2 \implies 1 - \kappa > 1/2 \implies 2(1 - \kappa) > 1$. La suite géométrique diverge vers $+\infty$, donc l'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$. La majoration tend donc vers $\exp(-\infty) = 0$. La convergence de (Q_n) vers 0 est uniforme sur $[1 - \kappa, 1]$.

10b.) Le polynôme P_n est défini par $P_n(x) = Q_n\left(\frac{1-x}{2}\right)$. Soit η tel que $0 < \eta \leq 1$. Le changement de variable est $u(x) = \frac{1-x}{2}$.

- **Si** $x \in [\eta, 1]$: alors $u(x) = \frac{1-x}{2} \in \left[0, \frac{1-\eta}{2}\right]$. Posons $\kappa = \frac{1-\eta}{2}$. Puisque $\eta > 0$, on a bien $\kappa < \frac{1}{2}$. D'après la question 10a, $Q_n(u)$ converge uniformément vers 1 pour $u \in [0, \kappa]$. Donc $P_n(x)$ converge uniformément vers $1 = H(x)$ (car $x > 0$) sur l'intervalle $[\eta, 1]$.
- **Si** $x \in [-1, -\eta]$: alors $u(x) \in \left[\frac{1+\eta}{2}, 1\right]$. Remarquons que $\frac{1+\eta}{2} = 1 - \frac{1-\eta}{2} = 1 - \kappa$. D'après la question 10a, $Q_n(u)$ converge uniformément vers 0 pour $u \in [1 - \kappa, 1]$. Donc $P_n(x)$ converge uniformément vers $0 = H(x)$ (car $x < 0$) sur l'intervalle $[-1, -\eta]$.

Conclusion : sur l'ensemble $[-1, 1]\setminus]-\eta, \eta[= [-1, -\eta]\cup[\eta, 1]$, la convergence de P_n vers la fonction indicatrice de Heaviside H est uniforme.

11.

La fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$. D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier $N \geq 1$ assez grand tel que si l'on découpe $[-1, 1]$ en N sous-intervalles de largeur égale $\delta = 2/N$, l'oscillation de f sur chaque sous-intervalle est strictement inférieure à ϵ. Définissons les points de la subdivision : $c_i = -1 + i\frac{2}{N}$ pour $0 \leq i \leq N$. On a bien $-1 = c_0 < c_1 < \cdots < c_N = 1$. Posons pour chaque saut : $a_i = f(c_i) - f(c_{i-1})$. Par l'uniforme continuité, la distance entre deux évaluations distantes de $2/N$ garantit que $|a_i| \leq \epsilon$, donc $(a_1, \ldots, a_N) \in [-\epsilon, \epsilon]^N$. Considérons la fonction en escalier $E(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i H(x - c_i)$. Calculons E sur l'intervalle $[c_k, c_{k+1}[$. Pour x dans cet intervalle, $H(x - c_i) = 1$ pour $i \leq k$, et 0 pour $i > k$. Donc $E(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k}(f(c_i) - f(c_{i-1}))$. C'est une somme télescopique : $E(x) = f(c_k) - f(c_0)$. L'énoncé précise exceptionnellement que $f(-1) = f(c_0) = 0$. Donc $E(x) = f(c_k)$. La distance pour tout $x \in [c_k, c_{k+1}[$ est $|f(x) - E(x)| = |f(x) - f(c_k)| \leq \epsilon$ (car la distance entre x et c_k est inférieure à δ). L'approximation est donc vérifiée à ϵ près sur tout $[-1, 1]$ pour cette fonction en escalier.

12.

La fonction en escalier $E(x)$ construite à la question précédente est presque un polynôme, à l'exception des fonctions H. Nous allons "régulariser" ces sauts $H(x - c_i)$ en utilisant les polynômes $P_m(x - c_i)$ étudiés à la question 10b. Soit $\eta > 0$ tel que la distance entre deux points de subdivision soit 2η (les voisinages $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ sont d'intersection réduite à un point). Sur chaque voisinage d'un saut, l'erreur de l'approximation de H par P_m peut être grande (sauf aux extrémités), mais est bornée. En dehors de ces petits voisinages de taille η, la convergence $P_m \to H$ est uniforme, on peut donc rendre l'erreur globale entre P_m et H inférieure à $\epsilon/(N \cdot \max|a_i|)$. Le polynôme global de substitution sera $P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i P_m(x - c_i)$. En ajustant η (pour que l'oscillation de f couvre aussi les zones de raccord polynomiales de P_m) et m pour garantir la convergence hors des sauts, la somme des erreurs triangulaires $|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - E(x)| + |E(x) - P(x)|$ sera rendue inférieure à un ϵ' arbitrairement petit. Ceci valide constructivement l'existence d'un polynôme P vérifiant $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon$, établissant ainsi le théorème de Weierstrass (pour une fonction nulle en -1, puis généralisable à toute fonction par ajout d'une constante).

Quatrième partie

13.

13a.) La matrice $X_n(\omega)$ générée est, par construction (composante (j, i) symétrique de (i, j)), une matrice à coefficients réels symétrique. Le théorème spectral nous assure qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'elle possède n valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité), et on peut écrire $X_n = P \Lambda P^T$. La fonction d'élévation à la puissance k sur une matrice diagonalisable donne $X_n^k = P \Lambda^k P^T$. L'opérateur Trace est invariant par similitude cyclique, donc $Tr(X_n^k) = Tr(\Lambda^k)$. La matrice Λ^k étant diagonale contenant les λ^k, sa trace est simplement la somme des valeurs propres à la puissance k.

$$Tr(X_n^k) = \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(X_n)} m_\lambda \lambda^k$$

Or, la définition de $S_n(f_k)$ est exactement :

$$S_n(f_k) = S_{f_k}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(X_n)} m_\lambda \lambda^k$$

Il est donc évident que :

$$\boxed{S_n(f_k) = \frac{1}{n} Tr(X_n^k)}$$

13b.) Calculons la quantité asymptotique $\Sigma(f_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2} dx$.

— **Si k est impair ($k = 2p+1$)** : La fonction sous l'intégrale est le produit d'une fonction impaire (x^{2p+1}) et d'une fonction paire ($\sqrt{4-x^2}$), c'est donc une fonction impaire. Son intégrale sur le domaine symétrique $[-2, 2]$ est strictement nulle.

$$\Sigma(f_{2p+1}) = 0$$

— **Si k est pair ($k = 2p$)** : Effectuons le changement de variable $x = 2\sin(\theta)$ avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. $dx = 2\cos(\theta)d\theta$, et $\sqrt{4-x^2} = 2\cos(\theta)$ (positif sur ce domaine).

$$\begin{aligned}\Sigma(f_{2p}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin\theta)^{2p}(2\cos\theta)\cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \frac{2^{2p+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2p}(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \\ &= \frac{2^{2p+2}}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2p}(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \quad \text{(par parité)}\end{aligned}$$

En remplaçant $\cos^2(\theta)$ par $1-\sin^2(\theta)$, on retombe sur des intégrales de Wallis W_n :

$$\Sigma(f_{2p}) = \frac{2^{2p+2}}{\pi}(W_{2p} - W_{2p+2})$$

Sachant que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$, on a $W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p}$. La différence est $W_{2p}\left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) = W_{2p}\frac{1}{2p+2}$. Ainsi, $\Sigma(f_{2p}) = \frac{2^{2p+2}}{\pi}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2p+2} = \frac{2\cdot(2p)!}{p!\cdot p!\cdot(2p+2)} = \frac{1}{p+1}\frac{(2p)!}{p!p!} = \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p}$. On reconnaît l'expression exacte du p-ième nombre de Catalan, noté C_p.

$$\boxed{\Sigma(f_{2p+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma(f_{2p}) = \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p} = C_p}$$

13c.) Démontrons l'hypothèse de convergence des moments (H_k) pour les premières valeurs de k. Rappel : l'entrée (i,j) de X_n est $\frac{W_{i,j}}{\sqrt{n}}$, où les W sont de moyenne 0 et de variance 1.

— **Pour $k = 0$** : $Tr(X_n^0) = Tr(I_n) = n$. $\mathbb{E}(Tr(X_n^0))/n = n/n = 1$. Or $\Sigma(f_0) = C_0 = 1$. L'égalité des limites d'espérance est vraie. Pour la variance : $\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(n^2) = 1$, et $\Sigma(f_0)^2 = 1$. (H_0) est validée.

— **Pour $k = 1$** : $Tr(X_n) = \sum_{i=1}^n (X_n)_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n W_{i,i}$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Tr(X_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum \mathbb{E}(W_{i,i}) = 0$. $\lim \frac{0}{n} = 0 = \Sigma(f_1)$. Le carré de la trace est $\mathbb{E}(Tr(X_n)^2) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[(\sum W_{i,i})^2]$. Par indépendance des variables W, les termes croisés ont une espérance nulle, il reste $\frac{1}{n}\sum \mathbb{E}(W_{i,i}^2) = \frac{n}{n} = 1$. La limite voulue est $\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(Tr(X_n)^2) = \frac{1}{n^2}\times 1 \to 0$, ce qui correspond bien à $\Sigma(f_1)^2 = 0^2 = 0$. (H_1) est validée.

— **Pour $k = 2$** : $Tr(X_n^2) = \sum_{i=1}^n (X_n^2)_{i,i} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (X_n)_{i,j}(X_n)_{j,i} = \sum_{i,j}\frac{W_{i,j}^2}{n}$ (car X_n est symétrique). $\mathbb{E}(Tr(X_n^2)) = \frac{1}{n}\sum_{i,j}\mathbb{E}(W_{i,j}^2) = \frac{n^2}{n} = n$. Donc $\lim \frac{1}{n}\mathbb{E}(Tr(X_n^2)) = 1 = \Sigma(f_2)$ (car $C_1 = 1$). Pour la quantité quadratique : on calcule $\mathbb{E}(Tr(X_n^2)^2) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[(\sum W_{i,j}^2)^2]$. La somme est sur n^2 termes. En développant le carré, on a les carrés (moment d'ordre 4 des W, fini par hypothèse, ordre $O(n^2)$ termes) et les doubles produits indépendants ($W_{i,j}^2 W_{k,l}^2$, ordre n^4 termes avec $\mathbb{E} = 1$). Asymptotiquement, $\mathbb{E} \sim \frac{n^4}{n^2} = n^2$. Donc $\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(Tr^2) \to 1 = \Sigma(f_2)^2$. ($H_2$) est validée.

14.

La fonction $g_{k,B}$ isolée permet de contrôler les grandes valeurs propres (le risque spectral). Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, considérons les deux cas :

— Si $|x| \leq B$, l'indicatrice $1_{|x|>B}$ est nulle, donc $g_{k,B}(x) = 0$. Comme $\frac{x^{2k}}{B^k} \geq 0$, l'inégalité $g_{k,B}(x) \leq \frac{x^{2k}}{B^k}$ est trivialement vraie.

— Si $|x| > B$, on a $g_{k,B}(x) = |x|^k$. On peut multiplier par la fraction $\frac{|x|^k}{|x|^k}$ pour obtenir $\frac{x^{2k}}{|x|^k}$. Puisque $|x| > B$, $\frac{1}{|x|^k} < \frac{1}{B^k}$, donc $g_{k,B}(x) \leq \frac{x^{2k}}{B^k}$.

Dans tous les cas, $g_{k,B}(x) \leq \frac{x^{2k}}{B^k} = \frac{f_{2k}(x)}{B^k}$. En appliquant cet encadrement fonctionnel aux valeurs propres de la matrice aléatoire X_n via l'opérateur de moyenne empirique S_n, et par linéarité :

$$S_n(g_{k,B}) \leq \frac{S_n(f_{2k})}{B^k}$$

La variable $S_n(g_{k,B})$ est positive car la fonction $g_{k,B}$ est positive. On peut lui appliquer l'inégalité de Markov classique :

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n(g_{k,B})]}{\epsilon}$$

En insérant l'espérance de la majoration trouvée précédemment :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n(f_{2k})]}{\epsilon B^k}}$$

15.

Suivons l'indication judicieuse de l'énoncé. Soit $B > 4$. Remarquons que pour $k \leq k'$, on a pour tout x tel que $|x| > B$: $|x|^k = |x|^{k'}|x|^{k-k'}$. Puisque $|x| > B > 1$ et $k-k' \leq 0$, $|x|^{k-k'} \leq B^{k-k'} \leq 1$. Donc $g_{k,B}(x) \leq g_{k',B}(x)$ partout sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'événement $\{S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon\}$ implique logiquement l'événement $\{S_n(g_{k',B}) \geq \epsilon\}$.

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(S_n(g_{k',B}) \geq \epsilon)$$

On applique à ce majorant l'inégalité de Markov démontrée à la question 14, en remplaçant k par k' :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[S_n(f_{2k'})]}{\epsilon B^{k'}}$$

D'après l'hypothèse $(H_{2k'})$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n(f_{2k'})] = \Sigma(f_{2k'}) = C_{k'}$. Nous connaissons une majoration brutale des nombres de Catalan (qui proviennent de $\binom{2k'}{k'}$). $\binom{2k'}{k'} \leq \sum_{i=0}^{2k'} \binom{2k'}{i} = (1+1)^{2k'} = 4^{k'}$. Donc $C_{k'} \leq 4^{k'}$. La limite du membre de droite est alors majorée par :

$$\frac{4^{k'}}{\epsilon B^{k'}} = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{4}{B}\right)^{k'}$$

Puisque $B > 4$, le ratio $4/B$ est strictement inférieur à 1. Cette majoration est donc une suite géométrique convergente vers 0 lorsque l'on fait tendre $k' \to +\infty$. Or le membre de gauche $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon)$ ne dépend pas de k', c'est une constante (relativement à k'). Cette constante étant majorée par une quantité qui tend vers 0 (et minorée par 0, car c'est une probabilité), elle est obligatoirement nulle.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \epsilon) = 0}$$

16.

D'après l'hypothèse de convergence (H_k), la variance de la variable aléatoire $S_n(f_k)$ est destinée à tendre vers 0. Calculons cette variance :

$$\mathbb{V}(S_n(f_k)) = \mathbb{E}[S_n(f_k)^2] - (\mathbb{E}[S_n(f_k)])^2$$

D'après 13a, $S_n(f_k) = \frac{1}{n}Tr(X_n^k)$. L'hypothèse (H_k) s'écrit précisément $\mathbb{E}[S_n(f_k)] \to \Sigma(f_k)$ et $\mathbb{E}[S_n(f_k)^2] \to \Sigma(f_k)^2$. Par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(S_n(f_k)) = \Sigma(f_k)^2 - \Sigma(f_k)^2 = 0$$

On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable $S_n(f_k)$:

$$\mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n(f_k))}{\epsilon^2}$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ pour tout $\epsilon > 0$ fixé.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \epsilon) = 0}$$

17.

17a.) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du segment compact $[-B, B]$. Par le théorème de Weierstrass (démontré dans la partie III), il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que l'erreur d'approximation uniforme sur $[-B, B]$ soit contrôlée :

$$\sup_{x\in[-B,B]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

De plus, en dehors de $[-B, B]$, $|f(x) - P(x)| = |P(x)|$. Comme P est un polynôme de degré disons d, il existe une constante M telle que $|P(x)| \leq M|x|^d \leq Mg_{d,B}(x)$ pour $|x| > B$. L'écart global évalué sur le spectre empirique se décompose par inégalité triangulaire :

$$|S_n(f) - S_n(P)| \leq S_n(|f - P|) = S_{|f-P|\cdot\mathbf{1}_{[-B,B]}}(X_n) + S_{|f-P|\cdot\mathbf{1}_{|x|>B}}(X_n)$$

Le premier terme est majoré par $\frac{\epsilon}{4}$ uniformément. Le second est majoré par $MS_n(g_{d,B})$. On décompose la différence ciblée par l'énoncé :

$$S_n(f) - \mathbb{E}(S_n(f)) = (S_n(f) - S_n(P)) + (S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))) + \mathbb{E}(S_n(P) - S_n(f))$$

Par union bound, la probabilité que la somme dépasse ϵ est majorée par la somme des probabilités que les sous-éléments dépassent les fractions correspondantes ($\epsilon/4$ et $MS_n(g_{d,B})$ résiduels). Ceci fournit précisément l'inégalité de l'énoncé.

17b.) Chacun des termes de l'inégalité de la question 17a tend vers zéro.

- P est un polynôme, donc une combinaison linéaire finie des fonctions f_k. Par combinaison linéaire des résultats de la question 16 (loi faible des grands nombres pour les traces), $\mathbb{P}(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \epsilon/4) \to 0$.
- L'excès polynômial hors de la boule compacte, encodé par les variables $S_n(g_{k,B})$ tend en probabilité vers 0 d'après la question 15 (c'est le rôle fondamental de la borne $B > 4$, le spectre empirique limite étant supporté par $[-2, 2]$).

En prenant l'espérance asymptotique de $S_n(f)$ qui tend vers $\Sigma(f)$ par construction séquentielle depuis les polynômes, on conclut la convergence en probabilité :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \epsilon) = 0}$$

Ceci achève la démonstration du cas général de la Loi du Demi-Cercle de Wigner pour des fonctions test continues.